Über Klassen majorisierbarer Operatoren auf Banachverbänden

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Ulf Schlotterbeck
aus Reutlingen

1969

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547603_0096

Über Klassen majorisierbarer Operatoren auf Banachverbänden

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Ulf Schlotterbeck
aus Reutlingen

1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	9. Juli 1969
Dekan:	Prof. Dr. A. Seilacher
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. G. Köthe

Einleitung

Bekanntlich bilden die majorisierbaren linearen Abbildungen von einem Vektorverband in einen ordnungsvollständiger Vektorverband für die natürliche Ordnung selbst einen ordnungsvollständigen Vektorverband (Kantorovitch |17|). Ebenso ist bekannt, dass ein stetiger linearer Operator von einem Banachverband E in einen (ordnungsvollständigen) Banachverband F nicht majorisierbar zu sein braucht, $\mathcal{L}(E,F)$ ist also i.a. für die natürliche Ordnung kein Verband. Auch die üblicherweise in der Funktionalanalysis betrachteten spezielleren Klassen von stetigen linearen Abbildungen — kompakte und schwachkompakte — bilden i.a. keine Verbände für die natürliche Ordnung. So kann man etwa kompakte Operatoren angeben, die nicht majorisierbar sind bzw. die einen nicht kompakten Absolutbetrag besitzen, und andererseits Operatoren mit kompaktem Absolutbetrag, die selbst nicht kompakt sind. Offenbar sind also topologische Eigenschaften von linearen Operatoren allein nicht geeignet, ordnungstheoretische Eigenschaften zu implizieren. Andererseits weiss man, dass z.B. für Operatoren auf AL-Räumen und auf ordnungsvollständigen AM-Räumen mit Einheit Stetigkeit äquivalent ist mit Majorisierbarkeit. Dies liegt natürlich an den ganz speziellen Beziehungen zwischen Ordnung und Topologie, die in diesen Räumen vorhanden sind.

In der vorliegenden Arbeit werden Charakterisierungen der AL-

und der AM-Räume zum Anlass genommen, zwei Klassen von Operatoren zu definieren — K-absolutsummierende bzw. majorisierende — die den Operatoren auf AL-Räumen bzw. auf AM-Räumen in ihren vektoriell-topologisch-ordnungstheoretischen Eigenschaften sehr nahe kommen. In der Tat zeigt sich, dass diese Operatoren dort, wo man es überhaupt erwarten kann, ordnungsvollständige Vektorverbände bilden: Theorem 2.2 liefert insbesondere die bisher bekannten Sätze über den Fall dass (für Banachverbände E,F) $\mathcal{L}(E,F)$ ein Verband ist.

Ellis hat in |8| gezeigt, dass die stetigen linearen Operatoren von einem AL-Raum in einen ordnungsvollständigen AM-Raum mit Einheit für die Operatornorm und die natürliche Ordnung einen AM-Raum mit Einheit bilden. In Abschnitt 2 dieser Arbeit wird dargestellt, in welcher Form man dieses Ergebnis 'dualisieren' kann (vgl. Prop. 2.3 und Prop. 2.4). Die Frage, wann $\mathcal{L}(E,F)$ für einen AM-Raum E und einen AL-Raum F ein Verband ist, wird in Abschnitt 4 beantwortet: Dies tritt nur in trivialen Fällen ein, nämlich wenn E oder F endliche Dimension hat (Theorem 4.5). Der Grund hierfür ist, dass die majorisierbaren Operatoren von einem AM-Raum in einen AL-Raum integral sind im Sinne von Grothendieck |10|, und dies ist wiederum eine einfache Konsequenz von gewissen natürlichen Beziehungen, die zwischen den K-absolutsummierenden und den majorisierenden Operatoren einerseits und den integralen Operatoren andererseits bestehen, sowie von bekannten Eigenschaften der AL- und der AM-Räume. Bei der Darstellung dieser Zusammenhänge in Abschnitt 3 treten zwei weitere Klassen von

Operatoren in Erscheinung, die absolutsummierenden und die Operatoren mit absolutsummierender Adjungierter. Für diese letzteren Operatoren erhält man eine elementare Charakterisierung: $T \in \mathcal{L}(E,F)$ hat genau dann eine absolutsummierende Adjungierte, wenn T 'hypermajorisierend' ist in dem auf Seite 48 präzisierten Sinn.

Die Klassen der K-absolutsummierenden, majorisierenden, absolutsummierenden, hypermajorisierenden und der integralen Operatoren sind alle voneinender verschieden. Indessen sind zum Beispiel majorisierende Abbildungen in einen AL-Raum stets integral, und dieser Sachverhalt charakterisiert umgekehrt die AL-Räume (Theorem 4.3). Entsprechend kann man auch die AM-Räume charakterisieren (Theorem 4.4), und unter demselben Gesichtspunkt bekommt man ferner eine Charakterisierung der Hilberträume (Theorem 5.1), die zusammen mit Theorem 2.2 eine bemerkenswerte ordnungstheoretische Eigenschaft der Hilbert-Schmidt Operatoren zur Folge hat (Theorem 5.3).

Herrn Prof. Dr. H. H. Schaefer möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine grosse Geduld herzlich danken. Ebenso gilt mein Dank für wertvolle Hinweise und Diskussionen Herrn Prof. Dr. T. Ando und Herrn Dr. H. P. Lotz.

0. Präliminarien

Dieser Abschnitt dient zur Klärung von Terminologie und Bezeichnungsweise. Daneben werden einige Resultate angegeben, die für das Folgende grundlegend sind und die meist stillschweigend benutzt werden.

1. Allgemeines. Der Skalarkörper für die betrachteten Vektorräume ist durchweg der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wenn von Operatoren auf Banachräumen die Rede ist, sind immer stetige lineare Abbildungen gemeint, auch wenn dies nicht ausdrücklich gesagt wird. Es wird grundsätzlich die Terminologie von Bourbaki |3| - |5| und von Schaefer |26| benutzt. Insbesondere bezeichnet (für Banachräume G, H) $\mathcal{L}(G,H)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen von G in H, $\mathcal{B}(G,H)$ den Raum der stetigen Bilinearformen auf G×H, beide Räume versehen mit der üblichen Norm.

2. Vektorverbände. Hierfür verweise ich generell auf Schaefer |26|. Ein Ideal I in einem Vektorverband L ist ein solider linearer Teilraum von L, d.h. ein linearer Teilraum mit der Eigenschaft, dass $x \in I$, $y \in L$, $|y| \leq |x|$ stets $y \in I$ zur Folge hat.
An Stelle von $\sup\{x,y\}$ bzw. $\inf\{x,y\}$ $(x,y \in L)$ wird gelegentlich auch $x \vee y$ bzw. $x \wedge y$ geschrieben.

3. Operatoren auf Vektorverbänden. L_1 und L_2 seien Vektorverbände, T sei eine lineare Abbildung von L_1 in L_2. T heisst

positiv, wenn $Tx \geq 0$ ist für alle positiven $x \in L_1$; T heisst majorisierbar oder regulär, wenn T Differenz von zwei positiven linearen Abbildungen von L_1 in L_2 ist. Der lineare Raum der majorisierbaren Operatoren von L_1 in L_2 wird mit $\mathcal{L}^b(L_1,L_2)$ bezeichnet. Der Kegel der positiven Abbildungen definiert in $\mathcal{L}^b(L_1,L_2)$ eine Ordnungsstruktur, die $\mathcal{L}^b(L_1,L_2)$ zu einem ordnungsvollständigen Vektorverband macht falls L_2 ordnungsvollständig ist (Kantorovitch |17|). Für T_1, $T_2 \in \mathcal{L}^b(L_1,L_2)$ und für $0 \leq x \in L_1$ ist dann

$$(0.1) \qquad (T_1 \vee T_2)x = \sup\{T_1y + T_2z: 0 \leq y,z \in L_1,\ y+z = x\},$$

und für $S \in \mathcal{L}^b(L_1,L_2)$, $0 \leq x \in L_1$ ist

$$(0.2) \qquad |S|x = \sup\{Sz: z \in L_1,\ |z| \leq x\}.$$

4. Banachverbände. Die Terminologie ist wieder die von Schaefer |26|. Insbesondere wird für ein positives Element x aus einem Banachverband E mit E_x der Raum $\bigcup_{n=1}^{\infty} (n[-x,x])$ bezeichnet, versehen mit der Eichfunktion von $[-x,x]$ als Norm. Wie üblich bezeichnet $[-x,x]$ dabei die Menge $\{z \in E: -x \leq z \leq x\}$. E_x mit dieser Norm und mit der von E induzierten Ordnung (E_x ist ein Ideal in E) ist ein AM-Raum mit Einheit x.

Mit C(X) wird der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem k o m p a k t e n Raum X bezeichnet, mit $\mathcal{M}(X)$ der Raum der Radonschen Masse auf X. Beide Räume seien stets mit der natürlichen Norm und Ordnung versehen. Die Bezeichnungen $L^p(M,\mu)$ und $L^p(\mu)$ werden im Sinne von Bourbaki |4| verwendet. Ist I eine mit der diskreten Topologie versehene Menge, μ das Mass mit der Masse +1 in jedem Punkt von I, so wird ℓ^p_I

schen Theorie der nuklearen Räume eine bemerkenswerte Rolle. Im wesentlichen handelt es sich dabei darum, zu gewissen Resultaten, wie sie etwa auch bei Pietsch |25| zu finden sind, 'duale' Gegenstücke anzugeben. Die mit 3.6 gewonnene elementare Charakterisierung dieser Operatoren liefert hierbei neue Gesichtspunkte: Man kann damit nach dem Muster von Pietsch |25| einen neuen Aufbau der Theorie der nuklearen Räume geben, wobei an die Stelle der summierbaren Folgen die Nullfolgen treten, an die Stelle der absolutsummierbaren Folgen die hypermajorisierten. Ich gehe darauf hier nicht näher ein und gebe nur das folgende Ergebnis vom Typus des Dvoretzky-Rogers-Theorems an, das man in diesem Zusammenhang erhält: In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existieren Nullfolgen, die nicht hypermajorisiert sind. Die hypermajorisierten Nullfolgen eines Banachraumes sollen im folgenden näher beschrieben werden.

3.9 Proposition

G sei ein Banachraum, $\{x_n\}$ sei eine Nullfolge in G, T sei die Abbildung $(\lambda_n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ von ℓ^1 in G. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\{x_n\}$ ist hypermajorisiert.

(b) T ist hypermajorisierend.

(c) T ist integral.

Beweis. Nach 3.7 und Lemma 2 sind die Aussagen (b) und (c) äquivalent. Zu zeigen ist noch die Äquivalenz von (a) und (b).

ist auch die π-Einheitskugel von $G \otimes H$ (bzw. von $G' \otimes H'$) die Polare der ε-Einheitskugel von $G' \otimes H'$ (bzw. von $G \otimes H$) in diesem Dualsystem. Analog zu dem eben Gesagten kann man auch auf $G \otimes H' \times G' \otimes H$ die kanonische Bilinearform betrachten, die $\langle G \otimes H', G' \otimes H \rangle$ wieder zu einem separierten Dualsystem macht. Auch hier ist die ε-Norm auf jedem der beiden Tensorprodukte jeweils dual zur π-Norm auf dem anderen, und die π-Norm auf $G \otimes H'$ (bzw. auf $G' \otimes H$) ist dual zur ε-Norm auf $G' \otimes H$ (bzw. auf $G \otimes H'$), falls G oder H' (bzw. falls G' oder H) die metrische Approximationseigenschaft besitzt (vgl. Grothendieck |11|, §1).

6. Summierbare und absolutsummierbare Familien. Nullfolgen. G sei ein Banachraum, I sei eine Indexmenge, $\mathfrak{F}(I)$ sei die durch Inklusion geordnete Menge der endlichen Teilmengen von I. Eine Familie $\{x_i : i \in I\}$[1] von Elementen aus G[2] heisst summierbar, wenn die gerichtete Familie $\{X_\iota : \iota \in \mathfrak{F}(I)\}$ mit $X_\iota = \sum_{i \in \iota} x_i$ in G konvergiert. Der Limes der Familie $\{X_\iota\}$ wird dann mit $\sum_{i \in I} x_i$ bezeichnet und heisst die Summe der Fa-

---

schaft, wenn die identische Abbildung von E auf jeder kompakten Teilmenge von E gleichmässig approximiert werden kann durch Operatoren aus $\mathcal{L}(E)$, die von endlichem Rang sind und eine Norm ≤ 1 haben. Jeder AL-Raum und jeder AM-Raum besitzt die metrische Approximationseigenschaft (Grothendieck |10|, chap. I, §5).

[1] Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird im folgenden auch kurz $\{x_i\}$ geschrieben an Stelle von $\{x_i : i \in I\}$.

[2] Im folgenden wird auch kurz $\{x_i : i \in I\} \subset G$ geschrieben um zum Ausdruck zu bringen dass die x_i Elemente von G sind.

milie $\{x_i\}$. $\{x_i\}$ heisst <u>absolutsummierbar</u>, wenn $\{\|x_i\| : i \in I\}$ eine summierbare Familie in $\mathbb{R}$ ist.

Man kann (vgl. Pietsch |25| und Schaefer |26|) die summierbaren bzw. die absolutsummierbaren Familien $\{x_i : i \in I\}$ in G auf natürliche Weise identifizieren mit den Elementen des komplettierten Tensorprodukts $\ell_I^1 \widetilde{\otimes}_\varepsilon G$ bzw. $\ell_I^1 \widetilde{\otimes}_\pi G$. Den Elementen des algebraischen Tensorprodukts $\ell_I^1 \otimes G$ entsprechen dabei jeweils die Familien, deren Elemente in einem endlichdimensionalen Teilraum von G liegen. Diese Identifikationen werden im folgenden meist stillschweigend vorgenommen. Es ist nun klar, was man unter der ε-Norm einer summierbaren und unter der π-Norm einer absolutsummierbaren Familie zu verstehen hat. Es zeigt sich, dass für eine summierbare Familie $\{x_i : i \in I\}$ in G

$$\|\{x_i\}\|_\varepsilon = \sup\{\sum_{i \in I} |\langle x_i, x' \rangle| : x' \in G', \|x'\| \leq 1\}$$

ist. Für eine absolutsummierbare Familie $\{y_j : j \in J\}$ in G ist

$$\|\{y_j\}\|_\pi = \sum_{j \in J} \|y_j\|$$

(vgl. etwa Schaefer |26|, chap.IV, sec. 10).

Man beachte, dass für eine p o s i t i v e summierbare Familie $\{x_i : i \in I\}$ in einem Banachverband E

$$\|\{x_i\}\|_\varepsilon = \left\|\sum_{i \in I} x_i\right\|$$

ist.

Die Nullfolgen in G kann man auf natürliche Weise identifizieren mit den Elementen des Raumes $c_o \widetilde{\otimes}_\varepsilon G$ (vgl. Grothendieck |10|; c_o ist der Raum der reellen Nullfolgen, versehen mit der Supremumsnorm). Auch diese Identifikation wird im folgenden stillschweigend vorgenommen, so dass von der ε-Norm einer Null-

folge gesprochen wird. Man hat (für eine Nullfolge (x_n) in einem Banachraum G)

$$\|(x_n)\|_\varepsilon = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es sei noch vermerkt, dass für eine absolutsummierbare Folge (x_n) in G

$$\|(x_n)\|_\pi = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n' \rangle : (x_n') \in c_o \otimes G', \ \|(x_n')\|_\varepsilon \leq 1\}$$

ist. Dies ist ein (leicht zu verifizierender) Spezialfall des oben erwähnten allgemeineren Sachverhalts, dass (für Banachräume G, H) die π-Norm auf $H' \otimes G$ dual ist zur ε-Norm auf $H \otimes G'$ wenn H' die metrische Approximationseigenschaft besitzt.

1. K-absolutsummierende und majorisierende Operatoren

In diesem Abschnitt werden grundlegende Eigenschaften der K-absolutsummierenden und der majorisierenden Operatoren hergeleitet. Zunächst werden Charakterisierungen der AL- und der AM-Räume angegeben, die den Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen bilden.

1.1 Theorem

E sei ein Banachverband. Genau dann ist E (als lokalkonvexer Vektorverband) isomorph einem AL-Raum, wenn in E jede positive summierbare Folge absolutsummierbar ist.

Beweis. Wenn E einem AL-Raum isomorph ist, so ist jede positive summierbare Folge $\{x_n\} \subset E$ absolutsummierbar: Man kann o.B.d.A. annehmen, dass die Norm additiv ist auf dem positiven Kegel von E und hat dann

$$\sum \|x_n\| = \|\sum x_n\| < \infty .$$

Nun sei umgekehrt in E jede positive summierbare Folge absolutsummierbar. Setze für $0 \leq x \in E$

$$p(x) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| : 0 \leq x_n \in E, \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x\}.$$

Man hat $p(x) < \infty$ für alle positiven $x \in E$. Dies ergibt sich aus dem folgenden Lemma, wenn man für C den positiven Kegel von E nimmt, für T die identische Abbildung von E und wenn man bedenkt, dass für eine positive summierbare Folge $\{x_n\} \subset E$

$\|(x_n)\|_\varepsilon = \|\sum x_n\|$ ist.

Lemma 1. I sei eine Indexmenge, C ein Kegel mit Spitze O in einem Banachraum G, T eine stetige lineare Abbildung von G in einen Banachraum H. Wenn für jede summierbare Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in C \cup \{O\}$ $(n \in \mathbb{N})$ die Folge $\{Tx_n\} \subset H$ absolutsummierbar ist, so existiert ein $k < \infty$ mit der Eigenschaft, dass für jede summierbare Familie $\{x_i : i \in I\}$ mit $x_i \in C \cup \{O\}$

$$\sum_{i \in I} \|Tx_i\| \leq k \|(x_i)\|_\varepsilon$$

ist.

Beweis. Angenommen, ein solches k existiert nicht. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Familie $\{x_i^{(n)} : i \in I\}$, $x_i^{(n)} \in C \cup \{O\}$, und eine endliche Teilmenge $I_n \subset I$ mit

$$\|(x_i^{(n)})\|_\varepsilon \leq 2^{-n} \tag{1.1}$$

und

$$\sum_{i \in I_n} \|Tx_i\| > 1. \tag{1.2}$$

Die endlichen Familien $\{x_i : i \in I_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ kann man nun zusammensetzen zu einer Folge $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ von Elementen aus $C \cup \{O\}$, für die wegen (1.1)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle y_j, x' \rangle| \leq \|x'\| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \leq \|x'\|$$

gilt für alle $x' \in G'$. $\{y_j\}$ ist also summierbar, indessen ist $\{Ty_j\}$ wegen (1.2) nicht absolutsummierbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für $O \leq x \in E$ ist also $p(x) < \infty$. Ich behaupte, dass $p(x+y) = p(x) + p(y)$ ist für je zwei positive $x, y \in E$. Zunächst ist $p(x+y) \geq p(x) + p(y)$, denn für positive summierbare Folgen

$\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset E$ mit $\sum x_n = x$ und $\sum y_n = y$ ist $\{x_n\} \cup \{y_n\}$ wieder eine positive summierbare Folge mit Summe x+y, also ist $p(x+y) \geq \sum\|x_n\| + \sum\|y_n\|$, woraus $p(x+y) \geq p(x) + p(y)$ folgt.

Um die umgekehrte Relation zu beweisen, betrachte ich eine positive summierbare Folge $\{z_n\} \subset E$ mit Summe x+y. Mit

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} z_n,$$

$$U_m = \inf(S_m, x)$$

$$V_m = \sup(0, S_m - x)$$

$$x_n = U_n - U_{n-1} \qquad (U_o = 0)$$

$$y_n = V_n - V_{n-1} \qquad (V_o = 0)$$

gilt $z_n = x_n + y_n$, und man hat $x_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ und $y_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, also

$$\sum\|z_n\| \leq \sum\|x_n\| + \sum\|y_n\| \leq p(x) + p(y).$$

Daraus folgt $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, also ist $p(x+y) = p(x)+p(y)$.

Offenbar ist $p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$ für $\lambda \geq 0$, und $\|z\| \leq p(|z|) \leq k\|z\|$ für alle $z \in E$ (k die Konstante von Lemma 1). Folglich ist $z \longrightarrow p(|z|)$ eine Norm auf E, welche additiv ist auf dem positiven Kegel und die Topologie von E erzeugt. E ist also als lokalkonvexer Vektorverband isomorph dem AL-Raum $(E, z \to p(|z|))$.

1.2 Theorem

E sei ein Banachverband. Genau dann ist E (als lokalkonvexer Vektorverband) isomorph einem AM-Raum, wenn in E jede Nullfolge majorisiert ist.

Beweis. Jede Nullfolge in einem AM-Raum ist majorisiert: Es sei E ein AM-Raum, $\{x_n\}$ eine Nullfolge in E und o.B.d.A. sei $\|x_n\| \leq 1$ für alle n. Bilde $y_i = \sup\{|x_n|: 2^{-i} < \|x_n\| \leq 2^{-i+1}\}$[1] $(i = 1,2,3,\ldots)$. Es ist $\|y_i\| \leq 2^{-i+1}$, also ist $\{y_i\}$ eine summierbare Folge in E, und $y = \sum y_i$ majorisiert $\{x_n\}$.

Nun sei umgekehrt E ein Banachverband, in dem jede Nullfolge majorisiert ist. Dann wird jede Nullfolge, die in der Einheitskugel von E enthalten ist, majorisiert durch ein positives Element von E mit einer Norm $\leq k$, k fest. Andernfalls gäbe es Nullfolgen $\{y_{ij}: i\in\mathbb{N}\}$ $(j = 1,2,3,\ldots)$ mit $\|y_{ij}\| \leq \frac{1}{j}$ und mit der Eigenschaft, dass jede Majorante von $\{y_{ij}: i\in\mathbb{N}\}$ eine Norm $> j$ hat. $\{y_{ij}: i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}\}$ ist wieder eine Nullfolge in E, nach Voraussetzung existiert also ein (o.B.d.A. positives) Element $y \in E$ mit $y_{ij} \leq y$ für alle i, j. Insbesondere hat jede der Folgen $\{y_{ij}: i\in\mathbb{N}\}$ mit $j > \|y\|$ y als Majorante, Widerspruch.

Hat man nun in E' eine positive summierbare Folge $\{x'_n: n\in\mathbb{N}\}$, so ist

$$\begin{aligned}\sum \|x'_n\| &= \sup\{|\textstyle\sum\langle x'_n, x_n\rangle|: \{x_n\} \in c_o\otimes E, \|\{x_n\}\|_\varepsilon \leq 1\}\\ &\leq \sup\{\textstyle\sum\langle x'_n, |x_n|\rangle: \{x_n\} \in c_o\otimes E, \|\{x_n\}\|_\varepsilon \leq 1\}\\ &\leq \sup\{\textstyle\sum\langle x'_n, y\rangle: 0 \leq y \in E, \|y\| \leq k\}\\ &\leq k\|\{x'_n\}\|_\varepsilon .\end{aligned}$$

In E' ist also jede positive summierbare Folge absolutsummierbar. Nach Thm. 1.1 ist E' also isomorph einem AL-Raum, E ist infolgedessen isomorph einem AM-Raum.

---

[1] $\sup \emptyset = 0$.

Ich nenne im folgenden einen (stetigen linearen) Operator T von einem Banachverband E in einen Banachraum H Kegel-absolutsummierend oder kurz K-absolutsummierend, wenn für jede positive summierbare Folge $(x_n) \subset E$ die Folge $(Tx_n) \subset H$ absolutsummierbar ist. Einen Operator S von einem Banachraum G in einen Banachverband F nenne ich majorisierend, wenn für jede Nullfolge $(y_n) \subset G$ (Sy_n) eine majorisierte Nullfolge in F ist.

1.3 Proposition

E sei ein Banachverband, H ein Banachraum. $T \in \mathcal{L}(E,H)$ ist genau dann K-absolutsummierend, wenn $T' \in \mathcal{L}(H',E')$ majorisierend ist. $S \in \mathcal{L}(H,E)$ ist genau dann majorisierend, wenn $S' \in \mathcal{L}(E',H')$ K-absolutsummierend ist.

Beim Beweis von 1.3 wird der folgende Hilfssatz verwendet:

Lemma 2. $T \in \mathcal{L}(E,H)$ sei K-absolutsummierend. Durch die Vorschrift

$$x \longrightarrow \sup\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| : 0 \leq x_n \in E,\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x\}$$

wird auf dem positiven Kegel von E eine additive und positivhomogene Abbildung p in $\mathbb{R}_+$ erklärt. Die eindeutig bestimmte positive Linearform $e' \in E'$, welche p auf ganz E fortsetzt, erfüllt die Ungleichung $\|Tx\| \leq \langle e', |x| \rangle$ für alle $x \in E$.

Beweis. Dass p additiv, positiv-homogen und endlich ist, ergibt sich wie im Beweis von 1.1. Wegen $\|Tx\| \leq \|T(x^+)\| + \|T(x^-)\|$ ist $\|Tx\| \leq \langle e', |x| \rangle$ für alle $x \in E$.

Beweis von 1.3. T sei K-absolutsummierend, e' sei die positive Linearform von Lemma 2. Man hat für $y' \in H'$, $0 \le x \in E$

$$\langle T'y', x\rangle = \langle y', Tx\rangle \le \|y'\|\,\|Tx\| \le \langle \|y'\| \cdot e', x\rangle ,$$

also ist $T'y' \le \|y'\| e'$, e' majorisiert also das Bild der Einheitskugel von H' unter T'. A fortiori wird das Bild einer Nullfolge in H' unter T' majorisiert durch ein geeignetes Vielfaches von e'. Ist umgekehrt T' majorisierend, $(x_n) \subset E$ eine positive summierbare Folge, so ist

$$\sum \|Tx_n\| = \sup\{ |\sum \langle Tx_n, y_n'\rangle| : (y_n') \in c_o \otimes H',\ \|(y_n')\|_\varepsilon \le 1\}$$
$$\le \sup\{ \sum \langle x_n, |T'y_n'|\rangle : (y_n') \in c_o \otimes H',\ \|(y_n')\|_\varepsilon \le 1\}.$$

Mit $(T'y_n')$ und $(-T'y_n')$ ist auch $(|T'y_n'|)$ majorisiert in E', und man findet wieder wie beim Beweis von 1.2 dass $(|T'y_n'|)$ für jede Folge $(y_n') \in c_o \otimes H'$ mit einer ε-Norm ≤ 1 majorisiert wird durch ein Element aus E' mit einer Norm $\le k$, k fest. Daraus folgt wieder

$$\sum \|Tx_n\| \le \sup\{ \sum \langle x_n, y'\rangle : 0 \le y' \in E',\ \|y'\| \le k\}$$
$$= k\|(x_n)\|_\varepsilon < \infty .$$

Wenn S majorisierend ist, so ergibt die gleiche Rechnung wie eben, dass für positive summierbare Folgen $(y_n') \subset E'$ $\sum \|T'y_n'\| \le h\|(y_n')\|_\varepsilon$ ist für ein geeignetes $h < \infty$. Ist schliesslich S' K-absolutsummierend, so ist nach dem oben Gesagten das Bild der Einheitskugel von H unter S'' majorisiert in E'', etwa durch $y'' \in E''$. Ist nun (x_n) eine Nullfolge in H, o.B.d.A. mit $\|x_n\| \le 1$ für alle n, so setze

$$y_n = \sup\{|Sx_j| : 2^{-n} < \|x_j\| \le 2^{-n+1}\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ ($\sup \emptyset = 0$). Wegen $|Sx| \le y''$ für $\|x\| \le 1$ hat man

$\|y_n\| \leq 2^{-n-1}\|y''\|$. $\{y_n\}$ ist also summierbar, und $y = \sum y_n$ ist ein Element von F, welches $\{Sx_n\}$ majorisiert.

1.4 Proposition

E sei ein Banachverband, G ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(E,G)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist K-absolutsummierend.

(b) Auf dem positiven Teil U'°_{+} der Einheitskugel von E', U'°_{+} versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf E, existiert ein positives Radonsches Mass μ mit der Eigenschaft dass

$$\|Tx\| \leq \int_{U'^{\circ}_{+}} \langle |x|, x' \rangle \, d\mu(x')$$

gilt für alle $x \in E$.

(c) T lässt sich zerlegen in der Form

$$T: E \xrightarrow{T_1} L \xrightarrow{T_2} G,$$

wo L ein AL-Raum ist, $0 \leq T_1 \in \mathcal{L}(E,L)$, $T_2 \in \mathcal{L}(L,G)$.

(c') T lässt sich zerlegen wie in (c), wobei T_1 aber ein Verbandshomomorphismus auf einen dichten Unterverband von L ist.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Bekanntlich kann man E homöomorph einbetten in den Banachraum $C(U'^{\circ}_{+})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf U'°_{+} (U'°_{+} mit der hier betrachteten Topologie ist ein kompakter Raum). Die nach Lemma 2 existierende Linearform $e' \in E'$ mit $\|Tx\| \leq e'(|x|)$ lässt sich daher auffassen als eine auf einem Teilraum von $C(U'^{\circ}_{+})$ definierte stetige Linearform, e' kann man also fortsetzen zu einem Radonmass ν auf U'°_{+}. Das Mass $\mu = |\nu|$

erfüllt die gewünschte Bedingung.

(a) $\Rightarrow$(c'): Es sei wieder $e' \in E'$ die positive Linearform von Lemma 2. Ich setze $N = \{x \in E: e'(|x|) = 0\}$. N ist ein (Verbands-) Ideal in E, E/N ist also für die natürliche Ordnung ein Verband, und die kanonische Abbildung T_1 von E auf E/N ist ein Verbandshomomorphismus. e' kann als strikt positive Linearform auf E/N aufgefasst werden, definiert also vermöge $\dot{x} \longrightarrow e'(|\dot{x}|)$ eine Norm q auf E/N, welche additiv ist auf dem positiven Kegel. Wegen $N \subset T^{-1}(0)$ induziert T auf natürliche Weise eine lineare Abbildung T_0 von E/N in G, die wegen $\|Tx\| \leq e'(|x|)$ $(x \in E)$ als Abbildung von (E/N,q) in G stetig ist, also eine stetige Fortsetzung T_2 auf die Komplettierung L von (E/N,q) besitzt. L ist ein AL-Raum, und $T = T_2 \circ T_1$ ist eine Zerlegung der gewünschten Art von T.

(c') $\Rightarrow$(c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$(a): Der Beweis ergibt sich sofort aus Thm. 1.1.

(b) $\Rightarrow$(a): Für eine positive summierbare Folge $\{x_n\} \subset E$ ist wegen (b)

$$\sum \|Tx_n\| \leq \sum \int \langle x_n, x' \rangle d\mu(x') = \int \sum \langle x_n, x' \rangle d\mu(x'),$$

also ist $\{Tx_n\}$ absolutsummierbar.

1.5 Proposition

G sei ein Banachraum, F ein Banachverband, $T \in \mathcal{L}(G,F)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist majorisierend.

(b) Das Bild der Einheitskugel von G unter T ist majorisiert in F''.

(c) T lässt sich zerlegen in der Form

$T: G \xrightarrow{T_1} C \xrightarrow{T_2} F$,

wobei C ein AM-Raum ist, $0 \leq T_2 \in \mathcal{L}(C,F)$, $T_1 \in \mathcal{L}(G,C)$.

(c') T lässt sich zerlegen wie in (c), wobei T_2 aber ein Verbandshomomorphismus auf ein Ideal in F ist.

Beweis. (a) $\Rightarrow$(b): T' ist nach 1.3 K-absolutsummierend. In F'' gibt es nach Lemma 2 ein positives Element y'', für welches $\|T'y'\| \leq y''(|y'|)$ gilt für alle $y' \in F'$. Dieses y'' majorisiert das Bild der Einheitskugel von G unter T in F'' (vgl. Beweis von 1.3)

(b) $\Rightarrow$(c): $y'' \in F''$ möge das Bild der Einheitskugel von G unter T majorisieren. Bilde $(F'')_y \cap F = C$. C ist ein Ideal in F und ein AM-Raum für die von $(F'')_y$ induzierte Norm, und T bildet G ab in C.

(c') $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$(a): Der Beweis ergibt sich sofort aus Theorem 1.2.

Die K-absolutsummierenden Operatoren von einem Banachverband E in einen Banachraum H (bzw. die majorisierenden Operatoren von einem Banachraum G in einen Banachverband F) bilden offenbar einen linearen Teilraum von $\mathcal{L}(E,H)$ (bzw. von $\mathcal{L}(G,F)$). Die bisher bewiesenen Aussagen legen es nahe, diese Räume wie folgt mit Normen zu versehen:

Wenn $T \in \mathcal{L}(E,H)$ K-absolutsummierend ist, so sei (vgl. Lemma 2)

$$\|T\|_L = \inf\{\|x'\| : 0 \leq x' \in E', \|Tx\| \leq x'(|x|) \text{ für alle } x \in E\}.$$

Entsprechend sei für einen majorisierenden Operator S von G in F

$$\|S\|_C = \inf\{\|y''\| : 0 \leq y'' \in F'', |Sx| \leq y'' \text{ falls } \|x\| \leq 1\}.$$

Man überlegt sich leicht, dass $T \longrightarrow \|T\|_L$ eine Norm auf dem Raum der K-absolutsummierenden Operatoren von E in H ist. Diese Norm wird im folgenden als L-Norm bezeichnet. Ebenso ist die Abbildung $S \longrightarrow \|S\|_C$ eine Norm auf dem Raum der majorisierenden Operatoren von G in F, die im folgenden als C-Norm bezeichnet wird. Der Raum der K-absolutsummierenden Operatoren von E in H, versehen mit der L-Norm, wird mit $\mathcal{L}^L(E,H)$ bezeichnet, der Raum der majorisierenden Operatoren von G in F, versehen mit der C-Norm, mit $\mathcal{L}^C(G,F)$.

Lemma 3. $T \in \mathcal{L}(E,H)$ sei K-absolutsummierend, e' sei die positive Linearform von Lemma 2. Es ist $\|T\|_L = \|e'\|$.

Beweis. Es sei $0 \leq x' \in E'$, und für alle $x \in E$ sei $\|Tx\| \leq \langle x', |x| \rangle$. Dann ist $\|x'\| = \sup\{\sum \langle x', x_n \rangle : 0 \leq x_n \in E, \|\sum x_n\| \leq 1\} \geq \sup\{\sum \|Tx_n\| : 0 \leq x_n \in E, \|\sum x_n\| \leq 1\} = \|e'\|$.

1.6 Proposition

E sei ein Banachverband, H ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(E,H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist K-absolutsummierend, $\|T\|_L \leq k$.

(b) T' ist majorisierend, $\|T'\|_C \leq k$.

(c) Es existiert ein AL-Raum L sowie eine positive lineare Abbildung $T_1 \in \mathcal{L}(E,L)$ mit einer Norm $\leq k$ und eine stetige lineare Abbildung $T_2 \in \mathcal{L}(L,H)$ mit Norm ≤ 1, so dass $T = T_2 \circ T_1$ ist.

(d) Für jede positive summierbare Folge $\{x_n\} \subset E$ ist $\sum \|Tx_n\| \leq k \|\sum x_n\|$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (c): Die beim Beweis von 1.4, (a) $\Rightarrow$ (c'), konstruierte Zerlegung von T hat wegen Lemma 3 die gewünschten Eigenschaften.

(c) $\Rightarrow$ (d): Dies ist klar, da in AL-Räumen wegen der Additivität der Norm auf dem positiven Kegel $\sum \|z_n\| = \|\sum z_n\|$ gilt für jede positive summierbare Folge $\{z_n\}$.

(d) $\Rightarrow$ (b): Aus (d) folgt, dass T K-absolutsummierend ist und dass die positive Linearform $e' \in E'$ von Lemma 2 eine Norm $\leq k$ hat. Da e' das Bild der Einheitskugel von H' unter T' majorisiert, ist T' majorisierend mit einer C-Norm $\leq k$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Jede Majorante des Bildes der Einheitskugel von H' unter T' in E''' hat als Einschränkung auf E eine positive Linearform $x' \in E'$, für die wegen

$$\|Tx\| = \sup\{\langle x, T'y' \rangle : y' \in H', \|y'\| \leq 1\}$$

$\|Tx\| \leq \langle x', |x| \rangle$ gilt für alle $x \in E$. $\|T'\|_C \leq k$ hat also $\|T\|_L \leq k$ zur Folge.

Korollar 1. Die identische Abbildung von $\mathcal{L}^L(E,H)$ in $\mathcal{L}(E,H)$ ist stetig mit einer Norm ≤ 1.

Korollar 2. $\mathcal{L}^L(E,H)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Es genügt nach Korollar 1, zu zeigen dass die Einheitskugel von $\mathcal{L}^L(E,H)$ abgeschlossen ist in $\mathcal{L}(E,H)$. Sei also $\{T_n\}$ eine Folge K-absolutsummierender Operatoren von E in H mit $\|T_n\|_L \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$, die in der Operatornorm gegen ein $T \in \mathcal{L}(E,H)$ konvergiert. Gegeben seien ferner r positive Elemente $x_1, \ldots, x_r$ aus der Einheitskugel von E sowie ein $\varepsilon > 0$. Es sei m

so gewählt, dass $\|T-T_m\| \leq \frac{\varepsilon}{r}$ ist. Dann hat man

$$\sum \|Tx_i\| \leq \sum \|T_m x_i\| + \sum \|(T-T_m)x_i\| \leq \left\|\sum x_i\right\| + \varepsilon.$$

ALso ist $\sum \|Tx_i\| \leq \left\|\sum x_i\right\|$, nach 1.6 ist T also K-absolutsummierend mit einer L-Norm ≤ 1.

Korollar 3. L sei ein AL-Raum. Die Räume $\mathcal{L}^L(L,H)$ und $\mathcal{L}(L,H)$ sind normisomorph.

Beweis. Die algebraische Identität der beiden Räume ergibt sich aus Thm. 1.1. Nach 1.6, (c) $\Rightarrow$ (a), ist die Einheitskugel von $\mathcal{L}(L,H)$ enthalten in der Einheitskugel von $\mathcal{L}^L(L,H)$, woraus wegen Korollar 1 die Normisomorphie folgt.

Korollar 4. E sei ein Banachverband. E ist genau dann norm- und verbandsisomorph einem AL-Raum, wenn die identische Abbildung von E K-absolutsummierend ist mit einer L-Norm ≤ 1.

Korollar 5. E und E_1 seien Banachverbände, H und H_1 seien Banachräume, und es sei $0 \leq S \in \mathcal{L}(E_1,E)$, $T \in \mathcal{L}(E,H)$ und $R \in \mathcal{L}(H,H_1)$. Wenn T K-absolutsummierend ist, so ist auch $R \circ T \circ S$ K-absolutsummierend, und man hat dann $\|R \circ T \circ S\|_L \leq$ $\leq \|R\| \|T\|_L \|S\|$.

Die Voraussetzung $S \geq 0$ kann in Korollar 5 nicht weggelassen werden. Vgl. dazu Abschnitt 3.

1.7 Proposition

G sei ein Banachraum, F ein Banachverband, $T \in \mathcal{L}(G,F)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist majorisierend, $\|T\|_C \leq k$.

(b) T' ist K-absolutsummierend, $\|T'\|_L \leq k$.

(c) Es existiert ein AM-Raum C sowie eine positive lineare Abbildung $T_2 \in \mathcal{L}(C,F)$ mit Norm $\leq k$ und eine stetige lineare Abbildung $T_1 \in \mathcal{L}(G,C)$ mit Norm ≤ 1, so dass $T = T_2 \circ T_1$ ist.

(d) Für je endlich viele Elemente $x_1,\ldots,x_n$ aus der Einheitskugel von G ist $\|\sup\{|Tx_i| : i=1,\ldots,n\}\| \leq k$.

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(b): Für jede Majorante y'' des Bildes der Einheitskugel von G unter T in F'' gilt $\|T'y'\| \leq \langle y'', |y'| \rangle$ (y' beliebig aus F'), und umgekehrt.

(b)$\Rightarrow$(c): Man wendet Lemma 3 an und findet, dass ein $y'' \in F''$ existiert mit $\|y''\| \leq k$, welches das Bild der Einheitskugel von G unter T majorisiert. Nun kann man wie im Beweis von 1.5 eine Zerlegung von T mit den gewünschten Eingeschaften konstruieren.

(c)$\Rightarrow$(d): Dies ist klar.

(d)$\Rightarrow$(b): Es sei $\{x_n\}$ eine Nullfolge in G, $\|x_n\| \leq 1$ für alle n. Bilde $y_m = \sup\{|Tx_n| : 2^{-m} < \|x_n\| \leq 2^{-m+1}\}$ (sup $\emptyset$ = 0), und $z_m = \sup\{y_n : 1 \leq n \leq m\}$ für m = 1,2,3,... . Wegen (d) ist $\|z_m\| \leq k$ und $\left\|\sum_{n=m}^{\infty} y_n\right\| \leq \frac{2k}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$, ferner ist $z_m + \sum_{n=m}^{\infty} y_n$ eine Majorante von $\{|Tx_n|\}$ für alle m. Die Folge $\{|Tx_n|\}$ hat also Majoranten in F, deren Normen beliebig nahe an k herankommen. Für eine positive summierbare Folge $\{y'_n\} \subset F'$ ist also

$\sum \|T' y'_n\| = \sup\{\sum \langle y'_n, Tx_n\rangle : \{x_n\} \in c_o \otimes G,\ \|\{x_n\}\|_\varepsilon \leq 1\}$
$\leq k \left\| \sum y'_n \right\|$, nach 1.6 ist daher $\|T'\|_L \leq k$.

Korollar 1. Die identische Abbildung von $\mathcal{L}^C(G,F)$ in $\mathcal{L}(G,F)$ ist stetig mit einer Norm ≤ 1.

Korollar 2. $\mathcal{L}^C(G,F)$ ist ein Banachraum.

Beweis. Es genügt wieder, zu zeigen dass die Einheitskugel von $\mathcal{L}^C(G,F)$ abgeschlossen ist in $\mathcal{L}(G,F)$. Es sei also $\{T_n\}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(G,F)$ mit $\|T_n\|_C \leq 1$ für alle n. Der Limes T von $\{T_n\}$ in $\mathcal{L}(G,F)$ hat als Adjungierte T' den Limes der Cauchyfolge $\{T'_n\} \subset \mathcal{L}(F',G')$. T' ist nach 1.6, Korollar 2 K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1, also ist T majorisierend mit C-Norm ≤ 1.

Korollar 3. C sei ein AM-Raum. Die Räume $\mathcal{L}^C(G,C)$ und $\mathcal{L}(G,C)$ sind normisomorph.

Korollar 4. E sei ein Banachverband. Genau dann ist E norm- und verbandsisomorph einem AM-Raum, wenn die identische Abbildung von E majorisierend ist mit einer C-Norm ≤ 1.

Korollar 5. G und G_1 seien Banachräume, F und F_1 seien Banachverbände, und es sei $R \in \mathcal{L}(G_1,G)$, $T \in \mathcal{L}(G,F)$ und $0 \leq S \in \mathcal{L}(F,F_1)$. Wenn T majorisierend ist, so ist auch $S \circ T \circ R$ majorisierend, und man hat dann $\|S \circ T \circ R\|_C \leq \|S\| \|T\|_C \|R\|$.

Die Voraussetzung $S \geq 0$ ist wieder unentbehrlich, vgl. Abschn. 3.

2. Die Ordnungsstruktur in $\mathcal{L}^L(E,F)$ und in $\mathcal{L}^C(E,F)$

Im folgenden seien E und F stets Banachverbände. Die in 1.4 und in 1.5 ausgesprochenen Zerlegungseigenschaften der K-absolutsummierenden und der majorisierenden Operatoren von E in F haben zur Folge, dass diese Operatoren stets majorisierbar sind durch Operatoren derselben Sorte von E in F'' (Prop. 2.1). Ist F Bild von F'' unter einer positiven, kontraktiven Projektion, so sind $\mathcal{L}^L(E,F)$ und $\mathcal{L}^C(E,F)$ für die natürliche Ordnung Banachverbände und Ideale im Verband der regulären Operatoren von E in F (Thm. 2.2). Die Fälle, wo $\mathcal{L}^L(E,F)$ bzw. $\mathcal{L}^C(E,F)$ ein AL- oder ein AM-Raum ist, kann man genau charakterisieren (2.3 und 2.4). Die Aussagen 2.3 und 2.4 sind Verallgemeinerungen der bekannten Dualitätssätze für AL- und AM-Räume: Setzt man $F = \mathbb{R}$, so bekommt man gerade, dass z.B. E' genau dann AL-Raum ist, wenn E AM-Raum ist. (Man hat stets $\mathcal{L}^L(E,\mathbb{R}) = \mathcal{L}^C(E,\mathbb{R}) = E'$, vgl. Lemma 3.) Interessant ist, dass im Gegensatz zu der Situation in 2.3 aus $\mathcal{L}^L(E,F) = \mathcal{L}^C(E,F)$ = AL-Raum nicht die Identität von $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}^C$ mit $\mathcal{L}(E,F)$ folgt: Im allgemeinen ist hier $\mathcal{L}^L(E,F)$ $(= \mathcal{L}^C(E,F))$ echter Teilraum von $\mathcal{L}(E,F)$, und die L-Norm (= C-Norm) ist grösser als die Operatornorm.

Lemma 1. (Krengel [18]). E sei ein Banachverband, F ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit. Dann ist $\mathcal{L}(E,F)$ für die natürliche Ordnung und die Operatornorm ein Banachverband.

Beweis. Offenbar sind alle stetigen linearen Operatoren von E in F ordnungsbeschränkt, also ist $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}^b(E,F)$ für die natürliche Ordnung ein Vektorverband. Der Darstellung (0.2) von $|T|$ entnimmt man, dass im übrigen $\|T\| = \||T|\|$ ist für alle $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Da die Operatornorm monoton ist auf dem positiven Kegel, ist die Einheitskugel von $\mathcal{L}(E,F)$ also solid. Damit ist alles gezeigt.

2.1 Proposition

E und F seien Banachverbände, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sei K-absolutsummierend mit $\|T\|_L \leq 1$ (bzw. majorisierend mit $\|T\|_C \leq 1$). Es existiert ein positiver Operator $\hat{T} \in \mathcal{L}(E,F'')$ mit $T \leq \hat{T}$ und $-T \leq \hat{T}$, der K-absolutsummierend ist mit $\|\hat{T}\|_L \leq 1$ (bzw. der majorisierend ist mit $\|\hat{T}\|_C \leq 1$).

Beweis. T sei K-absolutsummierend, $\|T\|_L \leq 1$. Nach 1.6 existiert eine Zerlegung von T' in

$$F' \xrightarrow{S_1} C \xrightarrow{S_2} E'$$

mit positivem S_2, $\|S_2\| \leq 1$, $\|S_1\| \leq 1$, wobei C der Dual eines AL-Raums ist, also ein ordnungsvollständiger AM-Raum mit Einheit. Nach Lemma 1 existiert $|S_1| \in \mathcal{L}(F',C)$, und $\||S_1|\|$ ist nicht grösser als 1. $S_1 \circ |S_1|$ ist majorisierend mit C-Norm ≤ 1 (Prop. 1.7), positiv und $\geq T', -T'$. Die Adjungierte von $S_2 \circ |S_1|$, eingeschränkt auf E, ist also eine positive K-absolutsummierende Majorante von T und -T mit einer L-Norm ≤ 1 (Prop. 1.6 und 1.7).

Wenn T majorisierend ist, $\|T\|_C \leq 1$, so existiert nach dem

eben Gesagten eine positive K-absolutsummierende Majorante $S \in \mathcal{L}(F',(E')'')$ von T' und -T' mit $\|S\|_L \leq 1$. E' ist, wie man weiss, Bild von $(E')''$ unter einer positiven Projektion P mit $\|P\| \leqq 1$. P∘S ist wieder positiv, K-absolutsummierend und $\geq$ T' und -T', und die Adjungierte von P∘S, eingeschränkt auf E, ist eine Majorante von T und -T mit den gewünschten Eigenschaften.

Lemma 2. E und F seien Banachverbände, $S,T \in \mathcal{L}(E,F)$ mit $0 \leq S \leq T$. Ist T K-absolutsummierend (bzw. majorisierend), so auch S, und man hat $\|S\|_L \leq \|T\|_L$ (bzw. $\|S\|_C \leq \|T\|_C$).

Beweis. T sei K-absolutsummierend. Man wendet 1.6 an und findet, dass für eine positive summierbare Folge $\{x_n\} \subset E$ wegen $\|Sx\| \leq \|Tx\|$ $(0 \leq x \in E)$

$$\sum \|Sx_n\| \leq \|T\|_L \|(x_n)\|_\varepsilon$$

ist. Also ist S K-absolutsummierend, $\|S\|_L \leq \|T\|_L$.

Ist T majorisierend, so hat man wegen $|Sx| \leq S|x| \leq T|x|$ $(x \in E)$ nach 1.7 für endlich viele Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus der Einheitskugel von E

$$\|\sup\{|Sx_i| : 1 \leq i \leq n\}\| \leq \|T\|_C ,$$

also ist auch S majorisierend mit $\|S\|_C \leq \|T\|_C$.

2.2 Theorem

E und F seien Banachverbände, und es existiere eine positive Projektion P von F'' auf F mit $\|P\| \leq 1$. Dann sind $\mathcal{L}^L(E,F)$

und $\mathcal{L}^c(E,F)$, versehen mit der natürlichen Ordnung, ordnungsvollständige Banachverbände und Ideale im Verband der regulären Operatoren von E in F.

Beweis. Zunächst bemerke ich, dass F unter den gegebenen Voraussetzungen ordnungsvollständig ist: Eine majorisierte Teilmenge A von F hat in F'' ein Supremum z'', und Pz'' ist das Supremum von A in F. $\mathcal{L}^b(E,F)$ ist also ein ordnungsvollständiger Vektorverband. Nun sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$ K-absolutsummierend, $\|T\|_L \leq 1$, und $0 \leq \hat{T} \in \mathcal{L}(E,F'')$ sei eine K-absolutsummierende Majorante von T und -T mit $\|\hat{T}\|_L \leq 1$ (vgl. Prop. 2.1). $\hat{T}_o = P \circ T \in \mathcal{L}(E,F)$ ist wieder K-absolutsummierend mit $\|\hat{T}_o\|_L \leq 1$ und majorisiert T und -T. Insbesondere ist T regulär, es existiert also $|T| \in \mathcal{L}(E,F)$ und man hat $|T| \leq \hat{T}_o$. Nach Lemma 2 ist $|T|$ K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1. Ist ferner $S \in \mathcal{L}^b(E,F)$, $|S| \leq |T|$, so ist auch $|S|$ K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1 (Lemma 2), und dies impliziert wegen $\|Sx\| \leq \||S|x\|$ $(0 \leq x \in E)$ wiederum $S \in \mathcal{L}^L(E,F)$, $\|S\|_L \leq 1$ (Prop. 1.6). $\mathcal{L}^L(E,F)$ ist also ein Ideal in $\mathcal{L}^b(E,F)$, und die Einheitskugel in $\mathcal{L}^L(E,F)$ ist solid.
Ganz analog zeigt man, dass auch $\mathcal{L}^c(E,F)$ ein Ideal ist in $\mathcal{L}^b(E,F)$ und dass die Einheitskugel solid ist in $\mathcal{L}^c(E,F)$. Daraus folgt alles Weitere.

Wegen 1.6, Kor. 3 und 1.7, Kor. 3 hat man folgendes

Korollar. Wenn E ein AL-Raum ist oder F ein AM-Raum (F wie in 2.2), so ist $\mathcal{L}(E,F)$ für die natürliche Ordnung und die Operatornorm ein ordnungsvollständiger Banachverband.

Beispiele von Banachverbänden, die Bilder ihres Biduals sind unter einer positiven Projektion mit Norm ≤ 1, sind die Räume $L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, die ordnungsvollständigen Räume $C(X)$, die reflexiven Banachverbände und die Banachverbände, in denen der Satz von der monotonen Konvergenz gilt [1]. (Die letzteren sind nach Lotz |21| Bänder in ihrem Bidual.) Insbesondere bilden also nach 2.2, Korollar die stetigen linearen Operatoren von einem AL-Raum in einen Banachverband in dem der Satz von der monotonen Konvergenz gilt, für die natürliche Ordnung und die Operatornorm einen ordnungsvollständigen Banachverband (Kantorovitch |17|, Krengel |18|), und dasselbe gilt für die stetigen linearen Operatoren von einem AL-Raum in einen ordnungsvollständigen $C(X)$. Im letzteren Fall (E AL-Raum, F ordnungsvollständiger $C(X)$) ist $\mathcal{L}(E,F)$ sogar ein AM-Raum mit Einheit (Ellis |8|, Krengel |19|). Umgekehrt: Wenn $\mathcal{L}(E,F)$ für die natürliche Ordnung und die Operatornorm ein AM-Raum mit Einheit ist, so ist nach Ellis |8| E ein AL-Raum und F ein AM-Raum mit Einheit. Es liegt die Frage nahe, ob entsprechende Aussagen für den Fall gemacht werden können, dass E ein AM-Raum ist, F ein AL-Raum. Das folgende Beispiel zeigt, dass hier $\mathcal{L}(E,F)$ im allgemeinen nicht einmal ein Verband ist.

Beispiel. Es sei T ein linearer topologischer Isomorphismus von ℓ^2 in einen AL-Raum L. (ℓ^2 ist nach Kadec und Pelczynski |13| z.B. dem abgeschlossenen Teilraum von $L^1([0,1])$ (Lebesguesches Mass) isomorph, der von den Rademacherschen Funktionen erzeugt wird. Nach Grothendieck |11| kann man im übrigen

---

[1] D.h. Banachverbände, in denen für jede $(\leq)$ gerichtete, topo-

jeden Hilbertraum linear-homöomorph einbetten in einen geeigneten AL-Raum.) $S = T \circ T'$ ist ein stetiger linearer Operator von dem AM-Raum $C = L'$ in L. Ich behaupte, dass S nicht majorisierbar ist. Wäre nämlich S majorisierbar, so wäre S als Differenz zweier positiver Operatoren von C in L majorisierend. Damit wäre auch T majorisierend, denn jede Nullfolge in ℓ^2 ist Bild einer Nullfolge in C unter T' (T' ist ein Homomorphismus von C auf ℓ^2). Nach 2.2 wäre T dann majorisierbar, also Differenz von zwei positiven Operatoren von ℓ^2 in L. Positive Operatoren in einen AL-Raum sind stets K-absolutsummierend, also wäre auch T K-absolutsummierend. Dies hätte schliesslich zur Folge, dass in ℓ^2 jede positive summierbare Folge absolutsummierbar wäre (T ist ein topologischer Isomorphismus), nach Thm. 1.1 wäre ℓ^2 also isomorph einem AL-Raum, also endlichdimensional. Das ist nicht wahr.

Das Beispiel zeigt auch, dass die stetigen linearen Operatoren von einem Raum $L^2(\mu)$ in einen AL-Raum im allgemeinen keinen Verband bilden, ebensowenig wie die Operatoren von einem AM-Raum in einen $L^2(\mu)$: T und T' sind beide nicht majorisierbar.

Da die Ordnungsstruktur eines AL-Raumes alle Eigenschaften besitzt, die sich bisher im Zusammenhang mit Majorisierbarkeitsfragen als wichtig erwiesen haben (ein AL-Raum ist stets ordnungsvollständig und ein Band in seinem Bidual), scheint zu dem oben erwähnten Sachverhalt, dass $\mathcal{L}(E,F)$ im wesentli-

---

logisch beschränkte Menge A der Abschnittsfilter von A konvergiert.

chen genau dann AM-Raum ist wenn E AL-Raum ist und F AM-Raum, keine Parallele zu existieren für den Fall E AM-Raum, F AL-Raum. Im folgenden wird indessen eine Variante davon angegeben (Prop. 2.3), die sich vollständig 'dualisieren' lässt (Prop. 2.4). Zunächst wird ein Hilfssatz bewiesen.

Lemma 3. Die Operatoren vom Rang 1 von einem Banachverband E in einen Banachverband F sind sowohl K-absolutsummierend als auch majorisierend, und es ist für $T = x' \otimes y \in \mathcal{L}(E,F)$ $(x' \in E', y \in F)$

$$\|T\|_L = \|T\|_C = \|x'\| \, \|y\|.$$

Beweis. Es ist klar, dass T K-absolutsummierend und majorisierend ist. $\|T\|_C = \|x'\| \, \|y\|$ ist unmittelbar aus der Definition der C-Norm ersichtlich. Die L-Norm von T ist die C-Norm von $T' = y \otimes x' \in \mathcal{L}(F',E')$, also ebenfalls gleich $\|x'\| \, \|y\|$.

2.3 Proposition

E und F seien Banachverbände $\neq \{0\}$, F wie in 2.2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\mathcal{L}^L(E,F)$ ist ein AM-Raum.

(b) $\mathcal{L}^C(E,F)$ ist ein AM-Raum.

(c) E ist ein AL-Raum und F ein AM-Raum.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (c): x_1' und x_2' seien positive Elemente von E', und es sei $0 \leq x \in F$ mit $\|x\| = 1$. T_i sei der Operator $x_i' \otimes x \in \mathcal{L}(E,F)$ $(i = 1,2)$. T_1 und T_2 sind beide positiv, nach Voraussetzung ist also $\|T_1 \vee T_2\|_L = \|T_1\|_L \vee \|T_2\|_L$. Nach (0.1) ist

$T = (x_1' \vee x_2') \otimes y$ das in $\mathcal{L}(E,F)$ gebildete Supremum von T_1 und T_2. T ist offenbar K-absolutsummierend, also ist T auch das Supremum von T_1 und T_2 in $\mathcal{L}^L(E,F)$. Nun kann man Lemma 3 anwenden und findet

$$\|x_1' \vee x_2'\| = \|x_1'\| \vee \|x_2'\|,$$

also ist E' ein AM-Raum und E folglich ein AL-Raum.

F ist AM-Raum: Es seien y_1 und y_2 positive Elemente von F, und es sei $0 \leq x' \in E'$ mit $\|x'\| = 1$. S_i sei der Operator $x' \otimes y_i \in \mathcal{L}(E,F)$. Man findet wieder, dass $S = x' \otimes (y_1 \vee y_2)$ das in $\mathcal{L}^L(E,F)$ gebildete Supremum von S_1 und S_2 ist, woraus wie oben $\|y_1 \vee y_2\| = \|y_1\| \vee \|y_2\|$ folgt.

(b)$\Rightarrow$(c) ergibt sich genauso.

(c)$\Rightarrow$(a):Nach 1.6, Kor. 3 fallen die Banachräume $\mathcal{L}(E,F)$ und $\mathcal{L}^L(E,F)$ unter den gegebenen Voraussetzungen zusammen, und nach 2.2 sind beide auch als Banachverbände isomorph. Es genügt also, zu zeigen dass für positive Operatoren S, T $\in \mathcal{L}(E,F)$ $\|S \vee T\| = \|S\| \vee \|T\|$ ist. Nun gilt nach einem Satz von Ellis (| 8 |, Thm. 1) für das in $\mathcal{L}(E,F'')$ gebildete Supremum U von S und T $\|U\| = \|S\| \vee \|T\|$. Führt man hinter U die (nach Voraussetzung existierende) positive kontraktive Projektion P: F''$\longrightarrow$ F aus, so erhält man einen positiven Operator U_o von E in F, der S und T majorisiert und eine Norm $\leq \|S\| \vee \|T\|$ hat. Dieselbe Abschätzung gilt auch für die Norm des in $\mathcal{L}(E,F)$ gebildeten Supremums von S und T, die umgekehrte Relation ist trivial.

(c)$\Rightarrow$(b) ergibt sich genauso wegen 1.7, Kor. 3.

2.4 Proposition

E und F seien Banachverbände $\neq \{0\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\mathcal{L}^L(E,F)$ ist ein AL-Raum.

(b) $\mathcal{L}^C(E,F)$ ist ein AL-Raum.

(c) E ist ein AM-Raum, F ist ein AL-Raum.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (c): Ich wende wieder Lemma 3 an um zu zeigen, dass E' AL-Raum ist. Für $0 \leq x_1', x_2' \in E'$, $0 < y \in F$ mit $\|y\| = 1$, $T_i = x_i' \otimes y \in \mathcal{L}(E,F)$ ist nach Voraussetzung

$$\|T_1 + T_2\|_L = \|T_1\|_L + \|T_2\|_L.$$

Die linke Seite ist aber gleich $\|x_1' + x_2'\|$, die rechte ist gleich $\|x_1'\| + \|x_2'\|$. Ganz analog findet man, dass F ein AL-Raum ist.

(b) $\Rightarrow$ (c) geht genauso.

(c) $\Rightarrow$ (b): Nach 2.2 ist $\mathcal{L}^C(E,F)$ unter den gegebenen Voraussetzungen ein Banachverband. Zu zeigen ist also noch, dass die C-Norm auf dem positiven Kegel von $\mathcal{L}^C(E,F)$ additiv ist. Zunächst bemerkt man, dass die C-Norm dort mit der Operatornorm zusammenfällt (Prop. 1.7, (c) $\Rightarrow$ (a)). Für positive Operatoren $S,T \in \mathcal{L}(E,F)$ ist aber $\|S + T\| = \|S'' + T''\| = \|S''e + T''e\|$ $= \|S'' e\| + \|T'' e\| = \|T''\| + \|S''\| = \|S\| + \|T\|$, wobei e die Ordnungseinheit von E'' ist.

(c) $\Rightarrow$ (a) ergibt sich genauso nach Anwendung von Prop. 1.6.

Wie gesagt, die Aussagen von 2.4 implizieren im allgemeinen nicht, dass $\mathcal{L}(E,F)$ ein Verband ist. Krengel [19] hat im üb-

rigen an einem einfachen Beispiel gezeigt, dass die Operatornorm auf $\mathcal{L}^b(E,F)$ (E AM-Raum, F AL-Raum) im allgemeinen keine Verbandsnorm ist, selbst wenn E oder F endlichdimensional ist.

In Abschnitt 4 wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass die stetigen linearen Operatoren von einem AM-Raum E in einen AL-Raum F einen Verband bilden für die natürliche Ordnung.

3. Integrale, absolutsummierende und hypermajorisierende Operatoren

In Abschnitt 2 wurde ein nicht majorisierbarer Operator von einem AM-Raum in einen AL-Raum angegeben (Beispiel auf Seite 30). Da die identische Abbildung eines AL-Raumes stets K-absolutsummierend ist, zeigt dieses Beispiel, dass für Operatoren $T \in \mathcal{L}^L(E,F)$, $T_1 \in \mathcal{L}(E_1,E)$ (E_1, E und F Banachverbände) der Operator $T \circ T_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$ nicht mehr K-absolutsummierend zu sein braucht. Die Forderung an T, dass $T \circ T_1$ stets wieder K-absolutsummierend sein soll, für jeden Banachverband E_1 und für jeden Operator $T_1 \in \mathcal{L}(E_1,E)$, ist sehr einschneidend: T muss dann a l l e summierbaren Folgen in E überführen in absolutsummierbare Folgen in F (Thm. 3.5). Dieser Sachverhalt deutet auf einen natürlichen Zusammenhang zwischen den K-absolutsummierenden und den majorisierenden Operatoren auf der einen Seite und den integralen Operatoren (im Sinne von Grothendieck [10]) auf der anderen hin. Im ersten Teil dieses Abschnitts werden diese letzteren Operatoren untersucht (Prop. 3.1 - Prop. 3.3). Diese Aussagen sind bekannt (vgl. Grothendieck [10]), die Beweise sind daher kurz gehalten. Theorem 3.5 stellt Beziehungen der K-absolutsummierenden zu den integralen Operatoren her. Entsprechende Beziehungen zwischen den majorisierenden und den integralen Operatoren werden in 3.6 angegeben. Theorem 3.6 wird zum Anlass genommen, zwischen den majorisierenden und den integralen eine weitere Klasse von Operatoren auszuzeichnen, die hypermajorisierenden. Diese Operatoren sind u.a. dadurch gekennzeichnet, dass sie eine abso-

lutsummierende Adjungierte haben (Thm. 3.7). Literaturhinweise dazu findet man in den Bemerkungen auf Seite 52.

Eine Bilinearform B auf dem Produkt $G \times H$ zweier Banachräume heisst nach Grothendieck |10| integral, wenn die Linearform auf $G \otimes H$, welche B entspricht, stetig ist für die ε-Topologie. $T \in \mathcal{L}(G,H)$ heisst ein integraler Operator, wenn die durch T definierte Bilinearform auf $G \times H'$ integral ist. Die Bezeichnung 'integral' erklärt sich dadurch, dass diese Bilinearformen und Operatoren eine Integraldarstellung besitzen, die im Fall der integralen Operatoren so aussieht:

3.1 Proposition

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. U° sei die Einheitskugel von G', versehen mit der von $\sigma(G',G)$ induzierten Topologie, $V^{\circ\circ}$ sei die Einheitskugel von H'', versehen mit der von $\sigma(H'',H')$ induzierten Topologie. Genau dann ist T integral, wenn auf dem (kompakten) topologischen Produkt $U^\circ \times V^{\circ\circ}$ ein Radonsches Mass μ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$(3.1) \qquad Tx = \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} \langle x,x' \rangle y'' \, d\mu(x',y'')$$

gilt für alle $x \in G$. Der Integrand werde dabei als Abbildung in den lokalkonvexen Raum $(H'',\sigma(H'',H'))$ aufgefasst, das Integral ist im Sinne von Bourbaki |5| zu verstehen.

Beweis. Nach (0.4) ist $G \otimes_\varepsilon H'$ ein normierter Teilraum von $C(U^\circ \times V^{\circ\circ})$, $(G \otimes_\varepsilon H')'$ also ein Quotient von $\mathcal{M}(U^\circ \times V^{\circ\circ})$. Offenbar kann man den linearen Raum der integralen Bilinearformen auf $G \times H'$ auf natürliche Weise identifizieren mit $(G \otimes_\varepsilon H')'$. Man bekommt so eine natürliche Abbildung $\nu \longrightarrow B_\nu$ von $\mathcal{M}(U^\circ \times V^{\circ\circ})$ in $\mathcal{B}(G,H')$, deren Bildraum gerade aus den integralen Bilinearformen besteht. Diese Abbildung ist gegeben durch

$$B_\nu(x,y') = \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} \langle x,x' \rangle \langle y',y'' \rangle \, d\nu$$

Insbesondere existiert zu einer integralen Abbildung $T \in \mathcal{L}(G,H)$ ein Mass μ auf $U^\circ \times V^{\circ\circ}$ mit

$$\langle Tx,y' \rangle = \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} \langle x,x' \rangle \langle y',y'' \rangle \, d\mu \,, \tag{3.2}$$

woraus (3.1) folgt.

Ist umgekehrt T in der Form (3.1) gegeben, so schreibt sich die durch T definierte Bilinearform auf $G \times H'$ in der Form (3.2). Daraus folgt aber, dass diese Bilinearform im Bild von $\mathcal{M}(U^\circ \times V^{\circ\circ})$ unter der kanonischen Abbildung in $\mathcal{B}(G,H')$ liegt, also dass sie integral ist.

Es ist leicht zu verifizieren, dass Kompositionen von stetigen und integralen Operatoren bzw. Bilinearformen stets wieder integral sind. Von diesem Sachverhalt wird fürderhin stillschweigend Gebrauch gemacht. In dem folgenden Hilfssatz wird ein typisches Beispiel eines integralen Operators angegeben.

Lemma 1. X sei ein kompakter Raum, μ ein Radonsches Mass auf X. Die identische Abbildung I von $L^\infty(\mu)$ in $L^1(\mu)$ ist integral.

Beweis. Es sei P die Menge der Extremalpunkte der positiven Facette von $(L^\infty(\mu))'$, versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf $L^\infty(\mu)$. Bekanntlich ist P kompakt, und $L^\infty(\mu)$ ist isomorph zu C(P). $L^1(\mu)$ kann man daher identifizieren mit einem Band im Raum $\mathcal{M}(P)$ der Radonschen Masse auf P, indem man jedem $g \in L^1(\mu)$ die Linearform $f \longrightarrow \int fg\, d\mu$ auf $L^\infty(\mu) = C(P)$ zuordnet. Aus I wird dann die Abbildung $J: h \longrightarrow h\cdot\nu$ von C(P) in das von ν erzeugte Band L von $\mathcal{M}(P)$, wobei ν das Mass auf P ist, welches der Klasse von $L^1(\mu)$ entspricht die die Funktion $\equiv 1$ enthält. Jh kann man für $h \in C(P)$ offenbar wie folgt schreiben:

$$Jh = \int_P h(z)\, \delta_z\, d\nu(z). \tag{3.3}$$

Dabei sei δ_z das Diracsche Mass im Punkte $z \in P$, und der Integrand werde als Abbildung in den mit der vagen Topologie versehenen Raum $\mathcal{M}(P)$ aufgefasst. Nun bedenke man, dass P eine kompakte Teilmenge der mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf C(P) versehenen Einheitskugel V^{∞} von $L'' = C(P)'$ ist, so dass durch die Festsetzung

$$\langle \lambda, F \rangle = \int_P F(z,z)\, d\nu(z) \qquad (F \in C(V^{\infty} \times V^{\infty}))$$

auf $V^{\infty} \times V^{\infty}$ ein Radonsches Mass λ definiert wird, mit dem sich (3.3) auch so schreiben lässt:

$$Jh = \int_{V^{\infty} \times V^{\infty}} \langle h, x'' \rangle\, x''\, d\lambda(x'', x').$$

J, und damit auch I, ist nach Prop. 3.1 also integral.

3.2 Proposition

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. Genau dann ist T integral, wenn es einen kompakten Raum X gibt, auf X ein Radonsches Mass μ, sowie stetige lineare Abbildungen T_1 von G in $L^\infty(\mu)$ und T_2 von $L^1(\mu)$ in H'', so dass $T = T_2 \circ I \circ T_1$ ist (I = identische Abbildung von $L^\infty(\mu)$ in $L^1(\mu)$).

Beweis. Wenn T sich in der angegebenen Art zerlegen lässt, so ist T integral nach Lemma 1. Zu zeigen ist also noch, dass jede integrale Abbildung T sich so zerlegen lässt. Dies folgt aber sofort aus der Darstellung (3.1) von T: Danach kann man für X den Raum $U^\circ \times V^{\circ\circ}$ nehmen, für μ das in der Integraldarstellung auftretende Mass, für T_1 die Abbildung die jedem x aus G die Funktion $(x',y'') \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ auf $U^\circ \times V^{\circ\circ}$ (genauer deren Klasse in $L^1(\mu)$) zuordnet, und für T_2 die Abbildung

$$f \longrightarrow \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} f(x',y'')\, y''\, d\mu(x',y'')$$

von $L^1(\mu)$ in H''.

Korollar. $T \in \mathcal{L}(G,H)$ ist genau dann integral, wenn $T' \in \mathcal{L}(H',G')$ integral ist.

Beweis. Mit T ist auch T' integral: Für ein Radonsches Mass μ auf einem kompakten Raum ist die Adjungierte der identischen Abbildung von $L^\infty(\mu)$ in $L^1(\mu)$ die identische Abbildung von $L^\infty(\mu)$ in den Bidual von $L^1(\mu)$, so dass sich T' für integrales T zerlegen lässt in der Form

$$H' \longrightarrow H''' \longrightarrow L^\infty(\mu) \xrightarrow{I} L^1(\mu) \longrightarrow L^1(\mu)'' \longrightarrow G'.$$

Umgekehrt: Ist T' integral, so nach dem eben Gesagten auch T'' . T kann man dann zerlegen in

$$G \longrightarrow G'' \longrightarrow L^{\infty}(\mu) \xrightarrow{I} L^{1}(\mu) \longrightarrow (H'')'' \xrightarrow{P} H'' ,$$

wobei μ wieder ein geeignetes Radonmass auf einem kompakten Raum ist, P irgend eine stetige Projektion auf H''.

Die integralen Bilinearformen auf dem Produkt $G \times H$ zweier Banachräume kann man (s. die Definition auf Seite 37) identifizieren mit den stetigen Linearformen auf $G \otimes_{\varepsilon} H$. Ich bezeichne im folgenden mit $\mathcal{B}^{I}(G,H)$ den Raum der integralen Bilinearformen auf $G \times H$, versehen mit der Norm

$$B \longrightarrow \|B\|_I = \sup\{ \sum B(x_i,y_i) : \sum x_i \otimes y_i \in G \otimes H, \ \|\sum x_i \otimes y_i\|_{\varepsilon} \leq 1\}.$$

$\mathcal{B}^{I}(G,H)$ ist ein Banachraum (nämlich der Dual von $G \otimes_{\varepsilon} H$), und die identische Abbildung von $\mathcal{B}^{I}(G,H)$ in $\mathcal{B}(G,H)$ ist offenbar stetig mit einer Norm ≤ 1.

Ist $T \in \mathcal{L}(G,H)$ integral, B_T die durch T auf $G \times H'$ definierte Bilinearform, so sei $\|T\|_I = \|B_T\|_I$ die integrale Norm von T. Der lineare Raum der integralen Operatoren von G in H, versehen mit dieser Norm, wird mit $\mathcal{L}^{I}(G,H)$ bezeichnet. Die folgende Aussage ist leicht zu verifizieren:

3.3 Proposition

G und H seien Banachräume. Dann ist auch $\mathcal{L}^{I}(G,H)$ ein Banachraum, und die identische Abbildung von $\mathcal{L}^{I}(G,H)$ in $\mathcal{L}(G,H)$ ist stetig mit einer Norm ≤ 1.

Es ist eine Eigenart der integralen Operatoren, dass gewisse Erblichkeitseigenschaften, die z.B. von den stetigen und den kompakten Operatoren her geläufig sind, bei ihnen nicht mehr vorhanden sind: Wenn $T \in \mathcal{L}(G,H)$ integral ist, so braucht der durch T definierte Operator T_1 von G in einen abgeschlossenen Teilraum $H_1 \subset H$ welcher T(G) enthält nicht wieder integral zu sein. Ebenso braucht für einen abgeschlossenen Teilraum G_o von G, welcher im Kern von T enthalten ist, der durch T auf natürliche Weise erklärte Operator von G/G_o in H nicht mehr integral zu sein[1].

Beispiel. Nach einem Satz von Grothendieck |11| (vgl. Thm. 5.1 und Lemma 2 auf Seite 44) ist eine Komposition $L \longrightarrow H \longrightarrow C$ von stetigen linearen Operatoren, wobei L ein AL-Raum ist, H ein Hilbertraum, C ein AM-Raum, stets integral. Konstruiert man insbesondere zu einem gegebenen unendlichdimensionalen Hilbertraum, etwa ℓ^2, auf die übliche Weise einen metrischen Homomorphismus S_1 von einem Raum ℓ^1_I auf ℓ^2 sowie einen Normisomorphismus S_2 von ℓ^2 in einen Raum ℓ^∞_J, so ist die Komposition

$$\ell^1_I \xrightarrow{S_1} \ell^2 \xrightarrow{S_2} \ell^\infty_J$$

integral. Indessen ist weder S_1 noch S_2 integral. Wäre z.B. S_1 integral, so wäre S_1 sogar nuklear[2], insbesondere wäre das Bild der Einheitskugel von ℓ^1_I unter S_1, also die Einheitskugel von ℓ^2, kompakt. Dies ist bekanntlich nicht der Fall. Ebenso sieht man, dass S_2 nicht integral sein kann:

---

[1] Dieses Phänomen wird in Grothendieck |11| systematisch untersucht.

[2] Ein Operator T von einem Banachraum G in einen Banachraum H

Die Adjungierte von S_2 wäre wieder ein integraler Homomorphismus auf einen unendlichdimensionalen Hilbertraum.

Im folgenden sollen einerseits die Operatoren charakterisiert werden, die integral gemacht werden können durch Anhängen eines Normisomorphismus ('Vergrössern' des Bildraums), andererseits die, welche integral gemacht werden können durch Vorschalten eines metrischen Homomorphismus. Nach dem oben Gesagten ist klar, dass man jedesmal eine Klasse von Operatoren erhält, die echt grösser ist als die Klasse der integralen Operatoren.

3.4 Proposition

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. Genau dann existiert ein Normisomorphismus T_1 von H in einen Banachraum H_1 mit der Eigenschaft, dass $T_1 \circ T$ integral ist, wenn auf der Einheitskugel U° von G', U° versehen mit der von $\sigma(G',G)$ induzierten Topologie, ein Radonsches Mass μ existiert so dass

$$\|Tx\| \leq \int_{U^\circ} |\langle x,x' \rangle| \, d\mu(x') \tag{3.4}$$

gilt für alle $x \in G$.

Beweis. Wenn ein Operator T_1 mit der angegebenen Eigenschaft

---

heisst nuklear, wenn er im Bild von $G' \widetilde{\otimes}_\pi H$ unter der kanonischen Abbildung in $\mathcal{L}(G,H)$ liegt. Nukleare Operatoren sind (als Limites von Folgen von Operatoren mit endlichem Rang in $\mathcal{L}(G,H)$) stets kompakt. Integrale Operatoren in einen reflexiven Raum sind nach Grothendieck [10] (chap. I, Th. 10) nuklear.

existiert, so ist nach 3.1 für $x \in G$

$$(T_1 \circ T)x = \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} \langle x,x' \rangle \, y'' \, d\nu(x',y'').$$

$V^{\circ\circ}$ ist dabei die Einheitskugel von H_1'', versehen mit der von $\sigma(H_1'',H')$ induzierten Topologie, ν ein geeignetes Radonmass auf $U^\circ \times V^{\circ\circ}$. Es ergibt sich:

$$\|Tx\| = \|(T_1 \circ T)x\| = \sup\{ \left\langle \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} \langle x,x' \rangle \, y'' \, d\nu \, , \, y' \right\rangle : y' \in H_1', \ \|y'\| \leq 1\}$$

$$\leq \sup\{ \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} |\langle x,x' \rangle \langle y'',y' \rangle| \, d|\nu| : y' \in H_1', \ \|y'\| \leq 1\}$$

$$\leq \int_{U^\circ \times V^{\circ\circ}} |\langle x,x' \rangle| \cdot 1 \, d|\nu|.$$

Das Mass μ auf U°, welches gegeben ist durch $\langle \mu, f \rangle = \langle |\nu|, f \otimes 1 \rangle$ $(f \in C(U^\circ))$, erfüllt also (3.4).

Der Rest der Behauptung ergibt sich aus dem folgenden Hilfssatz, wenn man bedenkt, dass jeder Banachraum normisomorph in einen geeigneten Raum ℓ_I^∞ eingebettet werden kann.

Lemma 2. T sei ein stetiger linearer Operator von einem Banachraum G in einen Banachraum H, und es existiere auf der Einheitskugelheitskugel U° von G', U° versehen mit der von $\sigma(G',G)$ induzierten Topologie, ein Radonmass μ so dass (3.4) gilt für alle $x \in G$. Ist S ein stetiger linearer Operator von H in einen AM-Raum C, so ist $S \circ T$ integral.

Beweis. Eine Zerlegung von $S \circ T$ in der Art von 3.2 lässt sich wie folgt konstruieren: Man bildet G zunächst in den Raum $L^\infty(U^\circ,\mu)$ ab, indem man jedem $x \in G$ die Klasse in $L^\infty(\mu)$ zuord-

net, die die Funktion $x' \longrightarrow \langle x,x' \rangle$ $(x' \in U^o)$ enthält. Diese Abbildung werde mit J_1 bezeichnet. Auf Grund der gegebenen Voraussetzungen liefert nun der Ansatz $(J_2 \circ I \circ J_1)x = (S \circ T)x$ $(x \in G)$, wobei I die identische Abbildung von $L^\infty(U^o,\mu)$ in $L^1(U^o,\mu)$ ist, eine stetige lineare Abbildung J_2 von $(I \circ J_1)(G) \subset L^1(U^o,\mu)$ in C. Da C'' ein ordnungsvollständiger Raum C(X) ist, existiert eine Fortsetzung $\hat{J}_2$ von J_2, die $L^1(U^o,\mu)$ abbildet in C'' [1]. Offenbar fällt $S \circ T$, aufgefasst als Abbildung in C'', zusammen mit $\hat{J}_2 \circ I \circ J_1$, nach 3.2 ist $S \circ T$ also integral.

3.5 Theorem

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt einen Banachraum H_1 und einen Normisomorphismus T_1 von H in H_1 so dass $T_1 \circ T$ integral ist.

(b) T führt summierbare Folgen in G über in absolutsummierbare Folgen in H [2].

(c) Für jeden Banachverband E und für jede stetige lineare Abbildung S von E in G ist $T \circ S$ K-absolutsummierend.

(d) Für jede stetige lineare Abbildung S von c_o in G ist $T \circ S$ K-absolutsummierend.

---

[1] Vgl. etwa Day |6|, Chap. V, § 4.

[2] Operatoren mit dieser Eigenschaft heissen nach Pietsch |25| absolutsummierend.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): Wenn (a) gilt, existiert nach Prop. 3.4 auf der Einheitskugel U^o von G', U^o versehen mit der von $\sigma(G',G)$ induzierten Topologie, ein Radonsches Mass μ so dass

$$\|Tx\| \leq \int_{U^o} |\langle x', x\rangle| \, d\mu(x')$$

gilt für alle $x \in G$. $\{x_n\}$ sei eine summierbare Folge in G. Für $x' \in U^o$ ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x'\rangle| \leq \|\{x_n\}\|_\varepsilon$, also hat man

$$\begin{aligned} \sum \|Tx_n\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U^o} |\langle x_n, x'\rangle| \, d\mu(x') \\ &= \int_{U^o} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x'\rangle| \, d\mu(x') \\ &\leq \|(x_n)\|_\varepsilon \, \|\mu\|. \end{aligned}$$

$\{Tx_n\} \subset H$ ist also absolutsummierbar.

Die Implikationen (b) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (d) sind trivial.

(d) $\Rightarrow$ (b): $\{x_n\}$ sei eine summierbare Folge in G, S sei die Abbildung $\{\alpha_n\} \longrightarrow \sum \alpha_n x_n$ von c_o in G. T$\circ$S ist nach Voraussetzung K-absolutsummierend, nach Lemma 1 von Abschnitt 1 (Seite 13) existiert also eine Konstante $k < \infty$ so dass für jede positive summierbare Folge $\{a_n\} \subset c_o$ $\|((T\circ S)a_n)\|_\pi \leq k\|\{a_n\}\|_\varepsilon$ ist. Insbesondere gilt mit $e_n = \{\delta_{in}\}$[1] $\in c_o$

$$\sum_{n=1}^{m} \|(T\circ S)e_n\| \leq k\|\{e_n : n=1,\ldots,m\}\|_\varepsilon \leq k.$$

Dabei ist $m \in \mathbb{N}$ beliebig, wegen $(T\circ S)e_n = Tx_n$ ist die Folge $\{Tx_n\}$ also absolutsummierbar.

(b) $\Rightarrow$ (a): Es sei J eine Indexmenge mit der Eigenschaft, dass ein metrischer Homomorphismus S von ℓ^1_J auf H' existiert. Man schliesst wieder aus Lemma 1 von Abschnitt 1 (Seite 13), dass $T\otimes I$ stetig ist als Abbildung von $G \otimes_\varepsilon \ell^1_J$ in $H \otimes_\pi \ell^1_J$. (I sei

[1] δ_{in} = Kroneckersymbol.

hier die identische Abbildung von ℓ^1; man beachte, dass $G\tilde{\otimes}_\varepsilon \ell^1_J$ kanonisch identifiziert werden kann mit dem Banachraum der summierbaren Familien $\{x_j : j\in J\}$ in G und ebenso $H\tilde{\otimes}_\pi \ell^1_J$ mit dem Banachraum der absolutsummierbaren Familien $\{y_j : j\in J\}$ in H, und dass aus $T\otimes I$ dann die Abbildung $\{x_j : j\in J\} \longrightarrow \{Tx_j : j\in J\}$ wird.) Auf $H\otimes_\pi \ell^1_J$ betrachte man die Linearform B_o die gegeben ist durch die Vorschrift

$$y\otimes a \longrightarrow \langle y, Sa\rangle \qquad (y \in H,\ a \in \ell^1_J).$$

B_o ist stetig, $B = B_o\circ(T\otimes I)$ ist also eine stetige Linearform auf $G\otimes_\varepsilon \ell^1_J$. Wegen $B(x,a) = \langle Tx, Sa\rangle$ ist B, aufgefasst als Element von $\mathcal{B}(G,\ell^1_J)$, die zu $S'oT \in \mathcal{L}(G,\ell^\infty_J)$ gehörige Bilinearform. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

Lemma 3. G und H seien Banachräume, T sei eine lineare Abbildung von G in H', B die T entsprechende Bilinearform auf $G\times H$. Wenn B integral ist, so ist auch T integral.

Beweis. B sei integral. Man findet wie im Beweis von 3.1, dass auf dem (kompakten) topologischen Produkt $U^o\times V^o$ der Einheitskugeln von G' und H', beide versehen mit der jeweiligen schwachen Topologie, ein Radonsches Mass μ existiert so dass

$$B(x,y) = \int_{U^o\times V^o} \langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle \, d\mu(x',y')$$

gilt für $(x,y) \in G\times H$. Offenbar ist dann

$$Tx = \int_{U^o\times V^o} \langle x,x'\rangle y' \, d\mu(x',y'),$$

also kann man (vgl. Beweis von 3.2) T zerlegen in der Art

$$T: G \longrightarrow L^{\infty}(U^{o} \times V^{o}, \mu) \xrightarrow{I} L^{1}(U^{o} \times V^{o}, \mu) \longrightarrow H',$$

wobei I die identische Abbildung ist. T ist also integral.

Wegen 1.3 und 3.2, Korollar kann man die Äquivalenz der Aussagen (a), (c) und (d) in Theorem 3.5 dualisieren zu

3.6 Theorem

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt einen Banachraum G_o und einen metrischen Homomorphismus T_o von G_o auf G so dass $T \circ T_o$ integral ist.

(b) Für jeden Banachverband F und für jede stetige lineare Abbildung S von H in F ist $S \circ T$ majorisierend.

(c) Für jede stetige lineare Abbildung S von H in ℓ^1 ist $S \circ T$ majorisierend.

Ich bezeichne im folgenden eine Nullfolge $\{x_n\}$ in einem Banachraum H als hypermajorisiert (vgl. 3.9, Korollar 2), wenn für jeden stetigen linearen Operator S von H in ℓ^1 die Folge $\{Sx_n\}$ majorisiert ist. Die Äquivalenz von (a) und (c) in 3.6 kann man dann auch so aussprechen: Genau dann existiert (zu $T \in \mathcal{L}(G,H)$) ein Banachraum G_o und ein metrischer Homomorphismus T_o von G_o auf G derart dass $T \circ T_o$ integral ist, wenn T Nullfolgen überführt in hypermajorisierte Nullfolgen. Einen Operator mit dieser Eigenschaft nenne ich im folgenden hypermajorisierend. Wegen Aussage (b) von 3.6 ist also $T \in \mathcal{L}(G,H)$ genau dann hypermajorisierend, wenn $S \circ T$ majorisie-

rend ist für jeden stetigen linearen Operator S von H in einen Banachverband F. 3.5 und 3.6 entnimmt man (wieder unter Beachtung von 3.2, Korollar) folgende Aussage:

3.7 Theorem

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$. T ist genau dann absolutsummierend, wenn T' hypermajorisierend ist. T ist genau dann hypermajorisierend, wenn T' absolutsummierend ist.

Es ist klar, dass Kompositionen von absolutsummierenden und stetigen Operatoren wieder absolutsummierend sind, und dass Kompositionen von hypermajorisierenden und stetigen Operatoren hypermajorisierend sind. Offenbar ist ferner für einen absolutsummierenden Operator $T \in \mathcal{L}(G,H)$ und für einen abgeschlossenen Teilraum $H_o \subset H$ welcher T(G) enthält auch der durch T definierte Operator von G in H_o absolutsummierend, und für einen hypermajorisierenden Operator S von G in H und einen abgeschlossenen Teilraum $G_o \subset G$ welcher im Kern von S enthalten ist ist auch der durch S auf G/G_o induzierte Operator in H hypermajorisierend. Indessen kann man wieder einfache Beispiele dafür angeben, dass die absolutsummierenden und auch die hypermajorisierenden Operatoren nicht b e i d e der eben betrachteten Erblichkeitseigenschaften besitzen.

Beispiel. Es sei S ein metrischer Homomorphismus von einem Raum ℓ^1_I auf ℓ^2, $S' : \ell^2 \longrightarrow \ell^\infty_I$ seine Adjungierte. $S' \circ S$ ist integral (vgl. Thm. 5.1 und Lemma 2 dieses Abschnitts), insbesondere also absolutsummierend und hypermajorisierend. Dagegen ist S' nicht absolutsummie-

rend: S' wäre dann sogar integral (Lemma 2), also wäre auch S integral; dies ist nicht möglich nach dem was in dem Beispiel auf Seite 42 gesagt wurde. Wegen 3.7 ist S also auch nicht hypermajorisierend.

Das Beispiel zeigt auch, dass absolutsummierende (bzw. hypermajorisierende) Operatoren im allgemeinen keine absolutsummierende (bzw. hypermajorisierende) Adjungierte haben. Ein absolutsummierender (bzw. hypermajorisierender) Operator ist daher im allgemeinen nicht zugleich hypermajorisierend (bzw. absolutsummierend).

3.8 Proposition

G und H seien Banachräume, $T \in \mathcal{L}(G,H)$ sei absolutsummierend oder hypermajorisierend. T lässt sich zerlegen in der Form

$$G \longrightarrow L^2(\mu) \longrightarrow H.$$

Beweis. Zunächst sei T absolutsummierend. Nach Prop. 3.4 existiert auf der mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf G versehenen Einheitskugel U° von G' ein Radonsches Mass μ so dass (3.4) gilt für alle $x \in G$. A fortiori ist dann

$$\|Tx\| \leq \left[\int_{U^\circ} |\langle x,x'\rangle|^2 d\mu(x')\right]^{\frac{1}{2}}$$

für alle $x \in G$. Nun verfährt man wie im Beweis von Lemma 2 und bekommt, da jeder abgeschlossene Teilraum eines Hilbertraums Bild einer stetigen Projektion ist, eine Zerlegung von T in

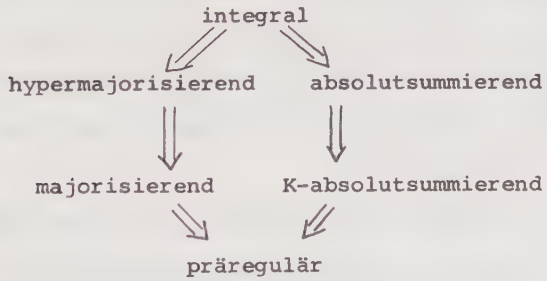
$$G \longrightarrow L^\infty(\mu) \longrightarrow L^2(\mu) \longrightarrow H.$$

Wegen 3.7 ergibt sich die Behauptung nun auch für hypermajo-

risierendes T.

Korollar. Absolutsummierende und hypermajorisierende Operatoren sind schwachkompakt.

Das folgende Diagramm soll die Beziehungen zwischen den bisher behandelten Eigenschaften von linearen Operatoren auf Banachräumen veranschaulichen. Je nach Bedarf wird dabei vorausgesetzt, dass der Urbildraum oder der Bildraum ein Banachverband ist. Um eine kurze Bezeichnung zu haben, nenne ich einen Operator T von einem Banachverband E in einen Banachverband F präregulär, wenn T Differenz von zwei positiven Operatoren von E in F'' ist.



Eigenschaften auf gleicher Höhe sind dual zueinander (1.3 und 3.7). Ausser den eingezeichneten Implikationen (die man den bisher bewiesenen Aussagen entnimmt) bestehen keine weiteren: Der Operator S' aus dem Beispiel auf Seite 49 ist hypermajorisierend (vgl. Thm. 5.1), aber nicht K-absolutsummierend. (Wäre S' K-absolutsummierend, so wäre in ℓ^2 jede positive summierbare Folge absolutsummierbar, denn S' ist ein Normisomor-

phismus.) Der Operator S aus demselben Beispiel ist infolgedessen absolutsummierend, aber nicht majorisierend. Die identische Abbildung eines unendlichdimensionalen AM-Raums ist majorisierend, aber nicht K-absolutsummierend (Thm. 1.1) oder hypermajorisierend (Prop. 3.8, Korollar). Die identische Abbildung eines unendlichdimensionalen AL-Raums ist daher K-absolutsummierend, aber nicht majorisierend oder absolutsummierend. Schliesslich ist die identische Abbildung von ℓ^2 präregulär, aber nicht K-absolutsummierend oder majorisierend.

Bemerkungen. Hypermajorisierende bzw. absolutsummierende Operatoren wurden zuerst von Grothendieck |10| untersucht. Diese Operatoren heissen dort 'applications sémi-intégrales à gauche' bzw. 'applications sémi-intégrales à droite'. Definierende Eigenschaften sind dabei jeweils die Aussagen (a) von 3.5 und 3.6. Die in 3.4 angegebene Charakterisierung der absolutsummierenden Operatoren stammt von Pietsch |24|.

Die absolutsummierenden Operatoren sind in der Theorie der nuklearen Räume von fundamentaler Bedeutung. Z. B. baut Pietsch in |25| die Theorie der nuklearen Räume im wesentlichen auf einer detaillierten Untersuchung dieser Operatoren auf. Demgegenüber sind die 'applications sémi-intégrales à gauche' seit den Arbeiten |10| und |11| von Grothendieck kaum mehr beachtet worden, wohl deswegen, weil ein direkter Zugang zu diesen Operatoren (ohne die Theorie der topologischen Tensorprodukte) nicht vorhanden war. Indessen spielen auch sie in der Grothendieck-

schen Theorie der nuklearen Räume eine bemerkenswerte Rolle. Im wesentlichen handelt es sich dabei darum, zu gewissen Resultaten, wie sie etwa auch bei Pietsch |25| zu finden sind, 'duale' Gegenstücke anzugeben. Die mit 3.6 gewonnene elementare Charakterisierung dieser Operatoren liefert hierbei neue Gesichtspunkte: Man kann damit nach dem Muster von Pietsch |25| einen neuen Aufbau der Theorie der nuklearen Räume geben, wobei an die Stelle der summierbaren Folgen die Nullfolgen treten, an die Stelle der absolutsummierbaren Folgen die hypermajorisierten. Ich gehe darauf hier nicht näher ein und gebe nur das folgende Ergebnis vom Typus des Dvoretzky-Rogers-Theorems an, das man in diesem Zusammenhang erhält: In jedem unendlichdimensionalen Banachraum existieren Nullfolgen, die nicht hypermajorisiert sind. Die hypermajorisierten Nullfolgen eines Banachraumes sollen im folgenden näher beschrieben werden.

3.9 Proposition

G sei ein Banachraum, $\{x_n\}$ sei eine Nullfolge in G, T sei die Abbildung $\{\lambda_n\} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ von ℓ^1 in G. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\{x_n\}$ ist hypermajorisiert.

(b) T ist hypermajorisierend.

(c) T ist integral.

Beweis. Nach 3.7 und Lemma 2 sind die Aussagen (b) und (c) äquivalent. Zu zeigen ist noch die Äquivalenz von (a) und (b).

(a) $\Rightarrow$(b): S sei ein stetiger linearer Operator von G in ℓ^1. Das Bild der Einheitskugel U von ℓ^1 unter T ist enthalten in der abgeschlossenen absolutkonvexen Hülle der Folge $\{x_n\}$, $(S\circ T)(U)$ ist also enthalten in der absolutkonvexen und abgeschlossenen Hülle von $\{Sx_n\}$, also in einem Ordnungsintervall von ℓ^1. $S\circ T$ ist also majorisierend. Für T treffen also die äquivalenten Aussagen von 3.6 zu, d. h.: T ist hypermajorisierend.

(b) $\Rightarrow$(a): S sei ein stetiger linearer Operator von G in ℓ^1. $S\circ T$ ist nach Voraussetzung majorisierend, das Bild der Einheitskugel U von ℓ^1 unter $S\circ T$ ist also majorisiert in $(\ell^1)''$ (Prop. 1.5), also auch in ℓ^1. Da $\{Sx_n\}$ enthalten ist in $(S\circ T)(U)$, ist auch $\{Sx_n\}$ majorisiert in ℓ^1. D. h.: $\{x_n\}$ ist hypermajorisiert.

Korollar 1. Jede summierbare Folge in einem Banachraum ist hypermajorisiert.

Beweis. $\{x_n\} \subset G$ sei summierbar, $T \in \mathcal{L}(\ell^1, G)$ sei definiert wie in Prop. 3.9. Offenbar kann man T zerlegen in

$$\ell^1 \xrightarrow{I} c_o \longrightarrow G,$$

wobei I die identische Abbildung ist. I ist integral. Dies kann man direkt zeigen (vgl. Grothendieck |12|); da I sich in der Art $\ell^1 \longrightarrow \ell^2 \longrightarrow c_o$ zerlegen lässt, erhält man die Behauptung im übrigen (unter Beachtung von Lemma 2) auch aus Thm. 5.1. Mit I ist auch T integral, also ist $\{x_n\}$ hypermajorisiert.

Dem Beweis von (b) $\Rightarrow$ (a) in Prop. 3.9 entnimmt man noch

Korollar 2. G sei ein Banachraum, $\{x_n\}$ eine Nullfolge in G, S ein stetiger linearer Operator von G in einen Banachverband F. Wenn $\{x_n\}$ hypermajorisiert ist, so ist die Folge $\{Sx_n\}$ majorisiert in F''.

Insbesondere ist jede hypermajorisierte Nullfolge $\{x_n\}$ in einem Banachverband F majorisiert in F''. Wenn eine positive Projektion von F'' auf F existiert, ist also $\{x_n\}$ auch majorisiert in F. Ich weiss indessen nicht, ob eine hypermajorisierte Nullfolge in einem Banachverband F generell schon in F eine Majorante besitzt.

4. K-absolutsummierende und majorisierende Operatoren auf AL- und AM-Räumen

Die zentralen Resultate dieses Abschnitts sind Theorem 4.1 und Theorem 4.2: Majorisierende Operatoren von einem Banachraum in einen AL-Raum sind stets integral, ebenso wie K-absolutsummierende Operatoren von einem AM-Raum in einen Banachraum. Beide Aussagen kann man umkehren und erhält so Charakterisierungen der AL- und der AM-Räume (Thm. 4.3, Thm. 4.4). Als Anwendung ergibt sich Thm. 4.5: Die stetigen linearen Operatoren von einem unendlichdimensionalen AM-Raum in einen unendlichdimensionalen AL-Raum bilden für die natürliche Ordnung niemals einen Verband.

4.1 Theorem

Jeder K-absolutsummierende Operator von einem AM-Raum in einen Banachraum ist integral.

Beweis. C sei ein AM-Raum, H sei ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(C,H)$ sei K-absolutsummierend und S sei ein stetiger linearer Operator von c_o in C. $S'' \in \mathcal{L}(\ell^\infty, C'')$ ist nach 2.2 Differenz von zwei positiven Operatoren: $S'' = S_1'' - S_2''$. Infolgedessen ist $(T \circ S)'' = T'' \circ S_1'' - T'' \circ S_2''$ als Differenz zweier K-absolutsummierender Operatoren wieder K-absolutsummierend. Damit ist auch $T \circ S$ K-absolutsummierend (Prop. 1.3), T ist also nach 3.5 sogar absolutsummierend. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus dem folgenden Hilfssatz.

Lemma 1. C sei ein AM-Raum, H ein Banachraum. Wenn $T \in \mathcal{L}(C,H)$ absolutsummierend ist, so ist T sogar integral.

Beweis. Wegen 3.2, Korollar genügt es, zu zeigen dass T'' integral ist. Man kann also o.B.d.A. voraussetzen, dass C ein Raum C(X) ist. Ist T absolutsummierend, so existiert nach 3.4 und 3.5 auf der mit der Topologie der einfachen Konvergenz auf C versehenen Einheitskugel U° von C' ein Radonsches Mass μ derart, dass

$$\|Tx\| \leq \int_{U^\circ} |\langle x,x'\rangle| \, d\mu(x')$$

gilt für alle $x \in C$. Nun bedenke man, dass die Extremalpunkte der positiven Facette von C' eine kompakte Teilmenge P von U° bilden und dass C kanonisch isomorph ist zu C(P). Jeder stetigen reellwertigen Funktion f auf P entspricht also ein Element $x_f \in C$ (nämlich die eindeutig bestimmte $\sigma(C',C)$-stetige Linearform auf C' welche f fortsetzt), und der Ansatz $\langle f,\nu\rangle = \langle x_f,\mu\rangle$ liefert ein Radonmass ν auf P welches

$$\|Tx\| \leq \int_{P} |\langle x,x'\rangle| \, d\nu(x')$$

erfüllt für alle $x \in C$. Jetzt kann man wie im Beweis von Lemma 2 in Abschnitt 3 (Seite 44) eine Zerlegung von T konstruieren in eine Komposition

$$C \xrightarrow{T_1} L^\infty(P,\mu) \xrightarrow{I} L \xrightarrow{T_2} H$$

von stetigen linearen Operatoren, wobei L die Abschliessung des Teilraums $(I \circ T_1)(C) \subset L^1(P,\nu)$ ist (I = identische Abbildung von $L^\infty(P,\nu)$ in $L^1(P,\nu)$). Wegen $C = C(P)$ ist $L = L^1(\nu)$, nach 3.2 ist T also integral.

4.2 Theorem

Jeder majorisierende Operator von einem Banachraum in einen AL-Raum ist integral.

Beweis. G sei ein Banachraum, L ein AL-Raum, $T \in \mathcal{L}(G,L)$ sei majorisierend. $T' \in \mathcal{L}(L',G')$ ist K-absolutsummierend, wegen 4.1 also integral. Damit ist auch T integral (Prop. 3.2, Kor.)

Ein regulärer Operator von einem AM- in einen AL-Raum ist stets majorisierend (und auch K-absolutsummierend). Also:

Korollar 1 (vgl. Grothendieck |10|, Chap. I, Th. 11). Jeder reguläre Operator von einem AM-Raum in einen AL-Raum ist integral.

Korollar 2. Die integralen Operatoren auf einem AL-Raum oder auf einem ordnungsvollständigen C(X) bilden für die natürliche Ordnung einen ordnungsvollständigen Vektorverband.

Beweis. Die integralen Operatoren fallen auf einem AL-Raum nach 4.1 mit den majorisierenden, auf einem AM-Raum nach 4.2 mit den K-absolutsummierenden Operatoren zusammen. Die Behauptung ergibt sich nun aus 2.2.

Entsprechendes gilt allgemeiner für die integralen (= hypermajorisierenden = majorisierenden) Operatoren von einem Banachverband in einen AL-Raum und für die integralen (= absolutsummierenden = K-absolutsummierenden) Operatoren von C(X) in einen Banachverband, der die Vor. von 2.2 erfüllt.

4.3 Theorem

E sei ein Banachverband. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) E ist (als lokalkonvexer Vektorverband) isomorph einem AL-Raum.

(b) Ein majorisierender Operator von einem Banachraum in E ist stets integral.

(c) Ein majorisierender Operator von einem Banachverband in E ist stets K-absolutsummierend.

E ist genau dann normisomorph einem AL-Raum, wenn jeder majorisierende Operator von einem Banachverband in E mit C-Norm ≤ 1 K-absolutsummierend ist mit L-Norm ≤ 1.

Beweis. (a) impliziert (b) wegen 4.1. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a): $\{x_n\}$ sei eine positive summierbare Folge in E, $x = \sum x_n$. Die identische Abbildung I von E_x (s. Seite 7) in E ist nach Voraussetzung K-absolutsummierend, es existiert also eine Zerlegung $E_x \xrightarrow{T_1} L \xrightarrow{T_2} E$ von I, wobei L ein AL-Raum ist, T_1 positiv. Die Menge $X \subset L$ der endlichen Teilsummen der Folge $\{T_1 x_n\}$ ist $(\leq)$-gerichtet und majorisiert durch $T_1 x$, also konvergiert der Sektionsfilter von X. $\{T_1 x_n\}$ ist also eine positive summierbare, also eine absolutsummierbare Folge in L. Damit ist auch die Folge $\{T_2 \circ T_1 x_n\} = \{x_n\} \subset E$ absolutsummierbar. Nun kann man 1.1 anwenden und erhält (a). Die Aussagen (a), (b) und (c) sind also äquivalent.

Wenn jeder majorisierende Operator von einem Banachverband in E mit C-Norm ≤ 1 K-absolutsummierend ist mit L-Norm ≤ 1,

so hat die oben betrachtete identische Abbildung von E_x in E eine L-Norm ≤ 1 falls $x = \sum x_n$ in der Einheitskugel von E enthalten ist. Man schliesst daraus nach Prop. 1.6, dass die identische Abbildung von E dann eine L-Norm ≤ 1 hat. Dies hat aber zur Folge, dass E normisomorph einem AL-Raum ist (Prop. 1.6, Korollar 4).

Umgekehrt: Sei T ein majorisierender Operator von einem Banachverband F in E, $\|T\|_C \leq 1$, und E sei ein AL-Raum. T lässt sich dann zerlegen in

$$F \xrightarrow{T_1} C \xrightarrow{T_2} E$$

mit positivem T_2, wobei T_1 und T_2 beide eine Norm ≤ 1 haben. Die Bitransponierte von T wird majorisiert durch den positiven Operator $T_2'' |T_1''| = S$. S ist offenbar K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1 (Prop. 1.6), dasselbe gilt nach 2.2 auch für T'' (man beachte, dass $|T''|$ existiert und majorisiert wird durch S), also ist auch T K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1 (Prop. 1.6 und Prop. 1.7). Damit ist 4.3 vollständig bewiesen.

4.4 Theorem

E sei ein Banachverband. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) E ist (als lokalkonvexer Vektorverband) isomorph einem AM-Raum.

(b) Ein K-absolutsummierender Operator von E in einen Banachraum ist stets integral.

(c) Ein K-absolutsummierender Operator von E in einen Banachverband ist stets majorisierend.

E ist genau dann normisomorph zu einem AM-Raum, wenn jeder K-absolutsummierende Operator von E in einen Banachverband mit L-Norm ≤ 1 majorisierend ist mit C-Norm ≤ 1.

Beweis. (a) impliziert (b) nach 4.2, (b) impliziert natürlich (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): S sei ein majorisierender Operator von einem Banachverband F in E', T sei die Einschränkung der Adjungierten von S auf E. T ist K-absolutsummierend, nach Voraussetzung also auch majorisierend. Die Adjungierte von T (das ist ein Operator von von F" in E') stimmt auf F mit S überein, mit T' ist also auch S K-absolutsummierend. Nun kann man 4.3 anwenden und findet, dass E' isomorph ist einem AL-Raum. Also ist E isomorph einem AM-Raum.

Dieselben Überlegungen wie eben zeigen unter Beachtung von Prop. 1.6 und Prop. 1.7 samt Korollaren auch folgendes: Wenn jeder K-absolutsummierende Operator mit L-Norm ≤ 1 von E in einen Banachverband majorisierend ist mit C-Norm ≤ 1, so ist jeder majorisierende Operator in E' mit C-Norm ≤ 1 auch K-absolutsummierend mit L-Norm ≤ 1. Nach 4.3 ist E' dann ein AL-raum, E also ein AM-Raum. Umgekehrt: Jeder K-absolutsummierende Operator mit L-Norm ≤ 1 von einem AM-Raum in einen Banachverband hat nach 4.3 eine K-absolutsummierende Adjungierte mit L-Norm ≤ 1, ist selbst also majorisierend mit C-Norm ≤ 1. Damit ist alles gezeigt.

4.5 Theorem

E sei ein AM-Raum, F ein AL-Raum. Wenn $\mathcal{L}(E,F)$ für die natürliche Ordnung ein Verband ist, so hat E oder F endliche Dimension.

Beweis. Ich setze voraus, dass $\mathcal{L}(E,F)$ ein Verband ist und dass F unendliche Dimension hat. Zu zeigen ist: dim $E < \infty$. Zunächst sei an das erinnert, was in Abschnitt 0 über Tensorprodukte von Banachräumen gesagt wurde[1]: Danach ist $E' \otimes_\pi F$ ein normierter Teilraum von $(E \otimes_\varepsilon F')' = \mathcal{B}^I(E,F')$, denn F besitzt die metrische Approximationseigenschaft. Offenbar ist $E' \otimes_\pi F$ sogar enthalten in $\mathcal{L}^I(E,F) \subset \mathcal{B}^1(E,F')$. Nach Korollar 1 von Theorem 4.2 ist die identische Abbildung J von $\mathcal{L}^I(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$ unter den gegebenen Voraussetzungen eine Abbildung a u f , J ist also ein topologischer Isomorphismus (Banachscher Homomorphiesatz). Da $E' \otimes_\varepsilon F$ ein normierter Teilraum von $\mathcal{L}(E,F)$ ist, ist die π-Norm auf $E' \otimes F$ also äquivalent mit der ε-Norm. Dieselben Verhältnisse liegen dann aber auch in $E \otimes F'$ und damit auch in $E' \otimes F''$ vor. (Man beachte, dass F' und F'' die metrische Approximationseigenachaft besitzen.) F' ist ein unendlichdimensionaler Raum C(X), F'' also ein unendlichdimensionaler $\mathcal{M}(X)$. In F'' existiert also ein Band, welches isomorph ist zu ℓ^1: Man wähle etwa aus X abzählbar viele verschiedene Punkte und betrachte das von den zugehörigen Diracmassen erzeugte Band. Die iden-

---

[1] Im folgenden werden nach Bedarf stillschweigend die bekannten kanonischen Identifikationen vorgenommen.

tische Abbildung von ℓ^1 kann man daher zerlegen in der Art

$$\ell^1 \longrightarrow F'' \longrightarrow \ell^1 ,$$

und dies liefert eine Zerlegung der identischen Abbildung I von $\ell^1 \otimes_\varepsilon E'$ auf $\ell^1 \otimes_\pi E'$ in

$$I: \ell^1 \otimes_\varepsilon E' \longrightarrow F'' \otimes_\varepsilon E' \longrightarrow F'' \otimes_\pi E' \longrightarrow \ell^1 \otimes_\pi E' .$$

Alle hierbei auftretenden Operatoren sind stetig, also ist auch I stetig. Dies hat $\ell^1 \tilde{\otimes}_\varepsilon E' = \ell^1 \tilde{\otimes}_\pi E'$ zur Folge, die identische Abbildung von E' ist also absolutsummierend, a fortiori schwachkompakt (Prop. 3.8, Korollar). E' ist daher reflexiv, also endlichdimensional.

5. Hilbert-Schmidt Operatoren. Ergänzungen

In diesem Abschnitt sollen die in 4.3 und 4.4 angeschnittenen Fragen weiter verfolgt werden: Was kann man sagen über einen Banachverband E mit der Eigenschaft, dass die K-absolutsummierenden oder die majorisierenden Operatoren mit E als Bildraum oder als Definitionsbereich zusammenfallen mit gewissen anderen Klassen von Operatoren aus dem Diagramm auf Seite 51. Je nachdem welche Klassen man dabei in Betracht zieht ergeben sich auch Fragestellungen, wo die Ordnungsstruktur auf E irrelevant wird. Es ist interessant, dass man in diesen Fällen stets auf endlichdimensionale oder auf Hilberträume geführt wird (vgl. die Tabellen am Ende dieses Abschnitts). Die Charakterisierung 5.1 der Hilberträume, die man in diesem Zusammenhang erhält, ist eine Variante eines Satzes aus Grothendieck |11|. Aus 5.1 ergeben sich zunächst zwei neue Charakterisierungen der Hilbert-Schmidt Operatoren auf Hilberträumen, die zugleich Banachverbände sind (Theorem 5.2). Unter Anwendung von Resultaten aus Abschnitt 2 folgt daraus schliesslich, dass die Hilbert-Schmidt Operatoren auf solchen Räumen stets ordnungsvollständige Vektorverbände bilden (Theorem 5.3). Am Ende dieses Abschnitts werden in Form von Tabellen eine Reihe weiterer Ergebnisse in der Art von 4.3, 4.4 und 5.1 angegeben.

Lemma 1 (Grothendieck |11|, Lindenstrauss und Pelczynski |20|). Es sei $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine reelle n×n Matrix mit der Eigenschaft, dass

$$(5.1) \qquad \Big|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\sigma_i\tau_j\Big| \le 1$$

ist falls $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und $t = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ Elemente aus der Einheitskugel von ℓ_n^∞ sind. Dann ist für je 2n Elemente x_i, y_j $(i,j = 1, \dots, n)$ aus der Einheitskugel eines Hilbertraumes

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_i, y_j) \le K$$

mit einer universellen Konstanten K die der Abschätzung $K \le \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}})$ genügt. $(\ ,\ )$ sei dabei das innere Produkt des betreffenden Hilbertraums.

Einen elementaren Beweis von Lemma 1 findet man in der Arbeit |20| von Lindenstrauss und Pelczynski.

Lemma 2. H sei ein Hilbertraum, $\{x_j\}$ eine Nullfolge in H. Die Abbildung

$$T\colon \{\lambda_j\} \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$$

von ℓ^1 in H ist absolutsummierend.

Beweis. Es sei $\{a_i\}$ eine summierbare Folge in ℓ^1, $a_i = \{\alpha_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$. O.B.d.A. sei $\|\{a_i\}\|_\varepsilon \le 1$. Offenbar ist für $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und $t = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ aus der Einheitskugel von ℓ_n^∞

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\sigma_i\tau_j\Big| \le \sum_i \Big|\sum_j \alpha_{ij}\tau_j\Big|$$

$$\le \sup\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} |\langle a_i, u\rangle| : u \in \ell^\infty,\ \|u\| \le 1\Big\}$$

$$\leq \|(a_i)\|_\varepsilon .$$

Die Matrix $(\alpha_{ij})_{i,j = 1, \ldots ,n}$ erfüllt also für alle n die Beziehung (5.1). Daher ist für alle n

$$S_n = \sup\{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x_j,y_i) : y_i \in H,\ \|y_i\| \leq 1\} \leq K.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|Ta_i\| \leq \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ist die Folge (Ta_i) also absolutsummierbar.

5.1 Theorem

H sei ein Banachraum. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) H ist (als lokalkonvexer Raum) isomorph einem Hilbertraum.

(b) Jeder K-absolutsummierende Operator von einem Banachverband in H ist absolutsummierend.

(c) Jeder majorisierende Operator von H in einen Banachverband ist hypermajorisierend.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): E sei ein Banachverband, $T \in \mathcal{L}(E,H)$ sei K-absolutsummierend und S sei ein Normisomorphismus von H in einen Raum ℓ_I^∞. Nach 1.4 kann man voraussetzen, dass E ein AL-Raum ist, wegen Lemma 2 in Abschnitt 3 (Seite 44) genügt es also, zu zeigen dass $S \circ T$ hypermajorisierend ist: Die Adjungierte von $S \circ T$ ist dann nämlich ein absolutsummierender Operator in einen AM-Raum, also integral. Sei also (x_n) eine Nullfolge in E. Die Abbildung

$$(\lambda_n) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T x_n$$

von ℓ^1 in H ist nach Lemma 2 absolutsummierend, nach Lemma 2 in Abschnitt 3 ist also die Abbildung

$$\{\lambda_n\} \longrightarrow S(\sum \lambda_n T x_n) = \sum \lambda_n (S \circ T) x_n$$

von ℓ^1 in ℓ_I^∞ integral. Dies bedeutet aber nach 3.9, dass die Folge $\{(S \circ T)x_n\} \subset \ell_I^\infty$ hypermajorisiert ist. $S \circ T$ führt also Nullfolgen über in hypermajorisierte Nullfolgen. Dies war zu zeigen.

(a) $\Rightarrow$ (c): T sei ein majorisierender Operator von H in einen Banachverband F. T' ist K-absolutsummierend, und mit H ist auch H' isomorph einem Hilbertraum. Nach dem oben Gesagten ist T' also absolutsummierend, also ist T hypermajorisierend.

(b) $\Rightarrow$ (a): Man betrachte einen metrischen Homomorphismus S von einem Raum ℓ_I^1 auf H. Nach Voraussetzung ist S absolutsummierend, es existiert also (Prop. 3.8) eine Zerlegung von S in eine Komposition

$$\ell_I^1 \xrightarrow{S_1} L^2 \xrightarrow{S_2} H$$

von stetigen linearen Operatoren, wobei L^2 ein Hilbertraum ist. Offenbar ist auch S_2 ein Homomorphismus, H ist also isomorph einem Quotienten von L^2, also einem Hilbertraum.

(c) $\Rightarrow$ (a): Die Adjungierte eines Normisomorphismus von H in einen Raum ℓ_I^∞ ist (Thm. 3.7) wieder ein absolutsummierender Homomorphismus auf H'. Wie eben folgt daraus, dass H' einem Hilbertraum isomorph ist. Dasselbe gilt dann auch für H.

In den beiden folgenden Aussagen ist von Hilbert-Schmidt Ope-

ratoren die Rede. Für die Definition dieser Operatoren verweise ich auf Pietsch |25|.

5.2 Theorem

H_1 und H_2 seien Hilberträume und zugleich Banachverbände, T sei ein Operator von H_1 in H_2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist ein Hilbert-Schmidt Operator.

(b) T ist K-absolutsummierend.

(c) T ist majorisierend.

Beweis. Es ist bekannt (vgl. Grothendieck | 9 |, Pietsch |25|), dass T genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator ist, wenn T absolutsummierend ist oder eine absolutsummierende Adjungierte hat. Wegen 5.1 folgt daraus die Behauptung.

Um das Wesentliche besser hervortreten zu lassen wird, der folgende Satz etwas allgemeiner formuliert als dies bisher in dieder Arbeit üblich war. Ich erinnere dazu an folgendes: Ein konvexer Kegel K in einem lokalkonvexen Raum L mit $O \in K$ heisst normal, wenn L ein Fundamentalsystem $\mathcal{U}$ von Nullumgebungen besitzt, so dass

$$U = (U+K) \cap (U-K) = \bigcup\{[x,y]: x \in U,\ y \in U\}$$

gilt für alle $U \in \mathcal{U}$. Ein Banachraum G, der eine Verbandsstruktur besitzt mit abgeschlossenem und normalem positivem Kegel, ist ein lokalkonvexer Vektorverband, d.h. es existiert auf G eine zu der gegebenen äquivalente Norm die G zu einem Banachverband macht (vgl. Schaefer |26|, Chap.V, 7.3 Cor.2).

1.7 Proposition

G sei ein Banachraum, F ein Banachverband, $T \in \mathcal{L}(G,F)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) T ist majorisierend, $\|T\|_C \leq k$.

(b) T' ist K-absolutsummierend, $\|T'\|_L \leq k$.

(c) Es existiert ein AM-Raum C sowie eine positive lineare Abbildung $T_2 \in \mathcal{L}(C,F)$ mit Norm $\leq k$ und eine stetige lineare Abbildung $T_1 \in \mathcal{L}(G,C)$ mit Norm ≤ 1, so dass $T = T_2 \circ T_1$ ist.

(d) Für je endlich viele Elemente $x_1,\ldots,x_n$ aus der Einheitskugel von G ist $\|\sup\{|Tx_i| : i=1,\ldots,n\}\| \leq k$.

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(b): Für jede Majorante y'' des Bildes der Einheitskugel von G unter T in F'' gilt $\|T'y'\| \leq \langle y'', |y'| \rangle$ (y' beliebig aus F'), und umgekehrt.

(b)$\Rightarrow$(c): Man wendet Lemma 3 an und findet, dass ein $y'' \in F''$ existiert mit $\|y''\| \leq k$, welches das Bild der Einheitskugel von G unter T majorisiert. Nun kann man wie im Beweis von 1.5 eine Zerlegung von T mit den gewünschten Eingeschaften konstruieren.

(c)$\Rightarrow$(d): Dies ist klar.

(d)$\Rightarrow$(b): Es sei (x_n) eine Nullfolge in G, $\|x_n\| \leq 1$ für alle n. Bilde $y_m = \sup\{|Tx_n| : 2^{-m} < \|x_n\| \leq 2^{-m+1}\}$ (sup $\emptyset$ = 0), und $z_m = \sup\{y_n : 1 \leq n \leq m\}$ für m = 1,2,3,... . Wegen (d) ist $\|z_m\| \leq k$ und $\left\|\sum_{n=m}^{\infty} y_n\right\| \leq \frac{2k}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$, ferner ist $z_m + \sum_{n=m}^{\infty} y_n$ eine Majorante von $(|Tx_n|)$ für alle m. Die Folge $(|Tx_n|)$ hat also Majoranten in F, deren Normen beliebig nahe an k herankommen. Für eine positive summierbare Folge $(y'_n) \subset F'$ ist also

Soweit die in den beiden Tabellen enthaltenen Aussagen noch nicht bewiesen wurden, wird dies in den anschliessenden Anmerkungen getan.

I Operatoren mit H als Definitionsbereich

i \ j	majorisierend	K-absolutsummierend	absolutsummierend	hypermajorisierend	integral
majorisierend	—	AL-Raum [1]	endliche Dimension [2]	Hilbertraum	endliche Dimension [2]
K-absolutsum.	AM-Raum	—	? [3]	AM-Raum	AM-Raum

II Operatoren in H

i \ j	majorisierend	K-absolutsummierend	absolutsummierend	hypermajorisierend	integral
majorisierend	—	AL-Raum	AL-Raum	? [5]	AL-Raum
K-absolutsum.	AM-Raum [4]	—	Hilbert raum	endliche Dimension [6]	endliche Dimension [6]

Anmerkungen

[1] Offenbar ist jeder majorisierende Operator von einem AL-Raum in einen Banachverband K-absolutsummierend. Die Umkehrung ergibt sich wegen 1.3 aus dem, was weiter unten in Anm. 4 gesagt wird.

[2] G sei ein Banachraum. Wenn jeder majorisierende Operator von

---

braucht H natürlich nur ein Banach r a u m zu sein.

G in einen Banachverband absolutsummierend ist, so besteht z.B. $\mathcal{L}(G,c_o)$ nur aus integralen Operatoren (vgl. Lemma 2 in Abschnitt 3 sowie 3.4 und 3.5). Daraus folgt wie im Beweis von 4.5 dass G endliche Dimension hat.

[3] Nach 4.1 ist jeder K-absolutsummierende Operator von einem AM-Raum in einen Banachraum absolutsummierend. Eine Charakterisierung der Banachverbände mit dieser Eigenschaft kenne ich nicht. Dem Beweis von 4.1 entnimmt man noch, dass jeder K-absolutsummierende Operator mit H als Definitionsbereich absolutsummierend ist falls H die folgende Eigenschaft besitzt: Jeder stetige lineare Operator von einem Banachverband in H ist präregulär (s. Seite 51).

[4] Es ist klar, dass jeder K-absolutsummierende Operator in einen AM-Raum majorisierend ist. Umgekehrt: H sei ein Banachverband mit der Eigenschaft, dass jeder K-absolutsummierende Operator in H auch majorisierend ist, $\{x_n\}$ sei eine Nullfolge in H. Betrachte die Abbildung T: $\{\lambda_n\} \longrightarrow \sum \lambda_n x_n$ von ℓ^1 in H. T ist K-absolutsummierend, also auch majorisierend. Das Bild der Einheitskugel U von ℓ^1 unter T ist also majorisiert in H''. Da $\{x_n\}$ enthalten ist in T(U), ist auch $\{x_n\}$ majorisiert in H'' . Man schliesst daraus, dass die Auswertungsabbildung von H in H'' majorisierend ist, die Einheitskugel von H ist also majorisiert in (H'')", also auch in H'' . Daher ist die identische Abbildung von H majorisierend. Nun kann man 1.2 anwenden.

[5] Nach 4.2 ist jeder majorisierende Operator in einen AL-Raum hypermajorisierend. Dies gilt auch noch (vgl. Anm. 3) für majorisierende Operatoren in einen Banachverband H der die Eigenschaft besitzt dass jeder stetige lineare Operator von H in ei-

nen Banachverband präregulär ist.

[6] G sei ein Banachraum. Wenn jede K-absolutsummierende Abbildung in G hypermajorisierend ist, so besteht z.B. $\mathcal{L}(\ell^1, G)$ nur aus integralen Operatoren (vgl. Anm. 2). Daraus folgt wie im Beweis von 4.5 dass G endliche Dimension hat.

Literatur

|1| Amemiya, I. and K. Shiga: On tensor products of Banach spaces. Kodai Math. Sem. Report 9 (1957), 161-178.

|2| Ando, T.: Nuclear sets and Banach lattice. Unveröffentlichte Note.

|3| Bourbaki, N.: Algèbre, chap. 3. 2. Aufl. Paris 1958.

|4| — Intégration, chap. 1-4. 2. Aufl. Paris 1965.

|5| — Intégration, chap. 6. Paris 1959.

|6| Day, M. M.: Normed linear spaces. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.

|7| Ellis, A. J.: The duality of partially ordered normed linear spaces. J. London Math. Soc. 39 (1964), 730-744.

|8| — Linear operators in partially ordered normed vector spaces. J. London Math. Soc. 41 (1966), 323-332.

|9| Grothendieck, A.: Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris 239 (1954) 577-579, 607-609.

|10| — Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. no. 16 (1955).

|11| — Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Boletim Soc. Mat. Sao Paolo 8 (1956), 1-79.

|12| — Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers. Boletim Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), 83-110.

|13| Kadec, M. I. and A. Pelczynski: Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p. Studia Math. 21 (1962), 161-176.

|14| Kakutani, S.: Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. of Math.(2) 42 (1941), 523-537.

|15| — Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. of Math. (2) 42 (1941), 994-1024.

|16| Kantorovitch, L.: Lineare halbgeordnete Räume. Mat. Sbornik 2 (1937), 121-168.

|17| — Linear operations in semiordered spaces. Mat. Sbornik 7 (1940), 209-284.

|18| Krengel, U.: Über den Absolutbetrag stetiger linearer Operatoren und seine Anwendung auf ergodische Zerlegungen. Math. Scand. 13 (1964), 151-187.

|19| — Ein Approximationslemma in komplexen Banachräumen mit positivem Kegel. Math. Scand. 15 (1964), 69-78.

|20| Lindenstrauss, J. and A. Pelczynski: Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.

|21| Lotz, H. P.: Ordnungsstetige Linearformen und minimale Banachverbände. Erscheint demnächst.

|22| Peressini, A. L.: Ordered topological vector spaces. New York 1967.

|23| Pietsch, A.: Absolute Summierbarkeit in Vektorverbänden. Math. Nachr. 26 (1963), 15-23.

|24| — Absolut summierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen. Math. Nachr. 27 (1963), 77-103.

|25| — Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin 1965.

|26| Schaefer, H. H.: Topological vector spaces. New York 1966.

Lebenslauf

Am 3. Juni 1941 wurde ich, Ulf Schlotterbeck, als Sohn des Fachschullehrers Karl Schlotterbeck und seiner Ehefrau Charlotte, geb. Deisser, in Reutlingen geboren. Ich besuchte dort von 1947 bis 1951 die Volksschule, danach bis zur Reifeprüfung im Jahr 1960 das Friedrich-List-Gymnasium. Anschliessend tat ich ein Jahr lang Dienst bei der Bundeswehr. Vom Sommersemester 1961 bis zum Sommersemester 1967 studierte ich an der Universität Tübingen Mathematik und Physik und bestand dort am 11. Juli 1967 die Diplomprüfung in Mathematik. Vom 1. September 1967 an verwaltete ich eine Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. In dieser Zeit fertigte ich unter der Anleitung von Prof. Dr. H. H. Schaefer die Dissertation 'Über Klassen majorisierbarer Operatoren auf Banachverbänden' an.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren W. Braunbek, H. Ehlich, H. Kneser, H. Krüger, G. Möllenstedt, M. Müller, G. Pickert, P. Roquette, H. H. Schaefer, H. Wielandt und K. Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063